9.4. HÁROMSZÖGEK, NÉGYSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Néhány alapvető geometriai fogalom (pont, egyenes, sík, távolság, szög) – megoldások

1283 *a)* Egy egyenes 4 különböző pontja 5 részre osztja az egyenest.
b) Egy egyenes 4 különböző pontja 6 szakaszt határoz meg az egyenesen.

1284 *a)* A síkon egy szabályos ötszög csúcsai 10 egyenest határoznak meg.
b) A síkon egy szabályos hatszög csúcsai 15 egyenest határoznak meg.

1285 *a)* A síkot egy szabályos ötszög oldalegyenesei 16 részre osztják.
b) A síkot egy szabályos hatszög oldalegyenesei 19 részre osztják.

1286 *a)* Párhuzamosak: AB és CD egyenesei.
b) Kitérők: AB és EG, AB és CG, CG és BD; DC és EG, valamint EG és BD egyenesei.

1287 Két megoldás lehetséges: $1200 + 800 = 2000$ m vagy $1200 - 800 = 400$ m.

1288 *a)* A távolság: 7,5 cm. *b)* A távolság: 2,5 cm.

1289 *a)* A távolság: $\frac{a+b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$. *b)* A távolság: $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ $(a > b)$.

1290 A szakaszok: $AP = 18$ cm és $PB = 12$ cm.

1291 A szakaszok: $AP = a \cdot \frac{p}{p+q}$ és $PB = a \cdot \frac{q}{p+q}$.

1292 *a)* 19,4º; *b)* 42,55º; *c)* 92,755º.

1293 *a)* 32°30’; *b)* 123°9’; *c)* 9°25’12”.

1294 A szögek nagysága: 32º, 52º, 72º, 92º, 112º.

1295 A szög 40º.

1296 A két szög: 120º és 60º.

1297 A derékszögű háromszög minden hegyesszögéhez találhatunk merőleges szárú szögpárt.

1298 A $CBD\sphericalangle = 24º$.

1299 A merőlegesek az eredeti szögtartomány szögfelezőjével 106°25’30”, illetve 73°34’30” nagyságú szöget zárnak be.

1320 A kismutató óránként 30º-ot fordul pozitív irányban, vagyis percenként 0,5º-ot. A nagymutató óránként 360º-ot fordul pozitív irányban, vagyis percenként 6º-ot. Az óramutatók
a) $40 \cdot 6° - 220 \cdot 0{,}5° = 130º$; *b)* $625 \cdot 0{,}5° - 25 \cdot 6° = 162{,}5° = 162°30’$;
c) $372 \cdot 0{,}5° - 12 \cdot 6° = 114º$
nagyságú szöget zárnak be.



1301 Tegyük fel, hogy x perc múlva a két mutató elfordulása 12 órához képest egyenlő. Az 1300. feladat alapján a $(240 + x) \cdot 0{,}5 = x \cdot 6$ egyenletet kell megoldanunk. Ebből:

$$x = \frac{240}{11} \approx 21{,}82.$$

Tehát $\frac{240}{11}$ perccel 4 után fedik egymást a mutatók.

1302 A 9 pont $3 \cdot 6 + 2 = 20$ egyenest határoz meg.

1303 *a)* Metszéspontok száma: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$

b) Az 5 páronként nem párhuzamos egyenes egymással $\frac{5 \cdot 4}{2}$ metszéspontot hoz létre, illetve az 5 egyenes mindegyike minden párhuzamos egyenest metsz. Így a metszéspontok száma: $\frac{5 \cdot 4}{2} + 5 \cdot 3 = 25.$

c) Metszéspontok száma: $\frac{4 \cdot 3}{2} + 4 \cdot 4 = 22.$

d) Metszéspontok száma: $\frac{3 \cdot 2}{2} + 3 \cdot 5 = 18.$

1304 *a)* Páronként párhuzamosak az egyenesek.

b) Egy ponton haladnak át az egyenesek, vagy kettő párhuzamos egyenes metsz egy harmadikat.

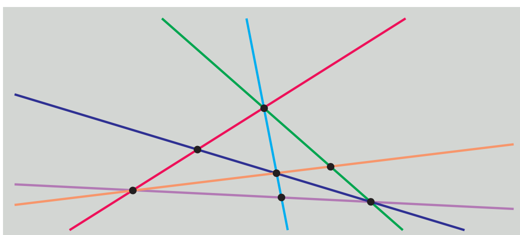
c) A három egyenes három különböző pontban metszi egymást.

1305 Hét óra után először x perc múlva zárjon be a két mutató ugyanakkora szöget a vízszintessel. Ekkor a kismutató vízszintessel bezárt szöge $60° - x \cdot 0{,}5°$, a nagymutató vízszintessel bezárt szöge pedig $90° - x \cdot 6°$. A két szög egyenlőségéből:

$$60 - x \cdot 0{,}5 = 90 - x \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11} \approx 5{,}45.$$

Kati 7 óra után $5\frac{5}{11}$ perccel indul az iskolába.

1306 Az ábrán látható 6 egyenes és metszéspontjaik megfelelnek a feladat feltételeinek.



1307 Legyen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Az egyenlőség bal oldala:

$$OM \cdot AB + ON \cdot BC = \frac{a+b}{2} \cdot (b-a) + \frac{b+c}{2} \cdot (c-b) = \frac{c^2 - a^2}{2}.$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$OP \cdot AC = \frac{c+a}{2} \cdot (c-a) = \frac{c^2 - a^2}{2}.$$

A egyenlőség jobb és bal oldala egyenlő, tehát az egyenlőség igaz.

1308 Tekintsük az egyenest egy számegyenesnek, a szakaszok végpontjait a számegyenesen egy-egy valós számnak. Az intervallumok bal végpontjainak megfelelő valós számok közül a legnagyobb legyen a, jobb végpontjainak megfelelő valós számok közül a legkisebb pedig b. (Véges sok intervallum van, tehát a és b létezik.) Mivel bármely két intervallumnak van közös pontja, teljesül, hogy $a \leq b$. Ha $a = b$, akkor a közös pont a, egyébként minden a és b közötti pont közös pont.

Háromszögek oldalai, szögei – megoldások

1309 A helyesen kitöltött táblázat:

α	β	γ	α'	β'	γ'
20°	40°	120°	160°	140°	60°
70°	80°	30°	110°	100°	150°
30°	60°	90°	150°	120°	90°

1320 A háromszög hiányzó szögei: 82°33’ és 55°2’.

1311 *a)* Derékszögű a háromszög. *b)* Hegyesszögű a háromszög.
c) Tompaszögű a háromszög.

1312 A háromszög szögei lehetnek: 78°, 78°, 24°; vagy 78°, 51°, 51°.

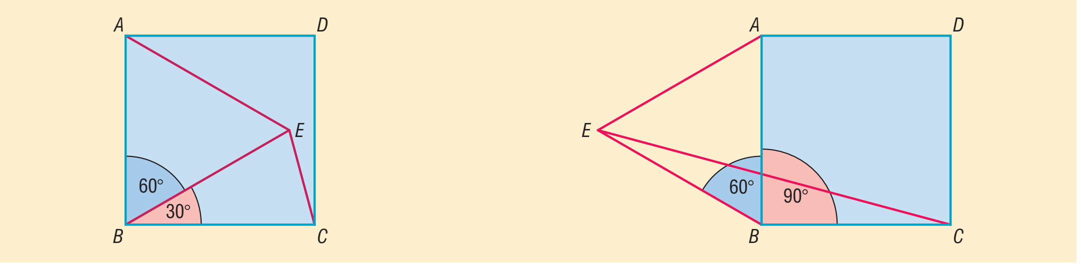
1313 Az ABE szabályos háromszög EBA szöge 60°.
Ha az E pont a háromszögön belül van, akkor az EBC egyenlő szárú háromszög B-nél lévő szöge $90° - 60° = 30°$, így a

$$BEC\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

Ha az E pont a háromszögön kívül van, akkor a BEC egyenlő szárú háromszög B-nél lévő szöge $90° + 60° = 150°$, így a

$$BEC\sphericalangle = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

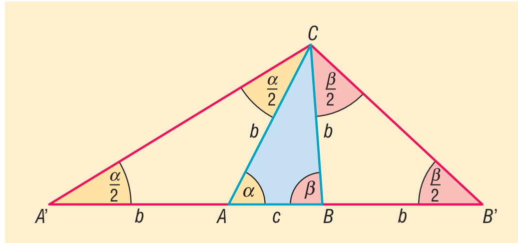
A BEC szög tehát lehet 75° vagy 15°.



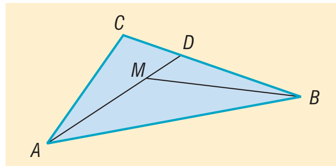
1314 *a)* Az $AA'C$ háromszög egyenlő szárú, így az A'-nél lévő belső szög az A-nál lévő külső szög fele, vagyis $AA'C\sphericalangle = 20°$. Ugyanígy $BB'C\sphericalangle = 35°$.
A háromszög szögei: 20°, 35°, és 125°.



b) Az *a)* részben levezetettek alapján az $AA'C$ háromszögben az A'-nél lévő belső szög az A-nál lévő külső szög fele, tehát $AA'C\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.
Ugyanígy $BB'C\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$.
A háromszög szögei: $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$.



1315 Az AM egyenese a BC oldalt D pontban metszi. Ismert, hogy egy háromszög külső szöge mindig nagyobb, mint a nem mellette lévő valamelyik belső szög.
Az ADC háromszög külső szöge $MDB\sphericalangle$, tehát $ACB\sphericalangle < MDB\sphericalangle$.
Az MBD háromszög külső szöge $AMB\sphericalangle$, tehát $MDB\sphericalangle < AMB\sphericalangle$.
Összevetve: $ACB\sphericalangle < MDB\sphericalangle < AMB\sphericalangle$, vagyis igaz a feladat állítása.



1316 A háromszög-egyenlőtlenség alapján:
a) létezik ilyen háromszög; *b)* nem létezik ilyen háromszög;
c) nem létezik ilyen háromszög.

1317 A harmadik oldal 10 vagy 4 cm. Ha a harmadik oldal 4 cm lenne, akkor nem teljesülne a háromszög-egyenlőtlenség. A harmadik oldal 10 cm. (Ilyen háromszög létezik.)

1318 A háromszög-egyenlőtlenségek alapján a harmadik oldal nagyobb, mint $10 - 6 = 4$ cm, és kisebb, mint $10 + 6 = 16$ cm. A harmadik oldal tehát lehet 5, 6, …, 15 cm. Tehát 11 ilyen háromszög van.

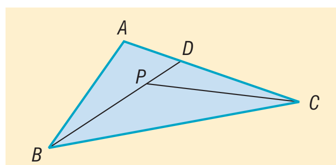
1319 A feltétel szerint: $2a = a + a \ge b + c$. A háromszög-egyenlőtlenség nem teljesül a $2a$, b, és c hosszúságú szakaszokra, így nem létezik ilyen háromszög.

1320 A BP egyenese az AC oldalt egy belső D pontban metszi. Az ABD háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$AB + AD > BD = BP + PD.$$

A PDC háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$PD + DC > PC.$$



A két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, hogy:

$$(AB + AD) + (PD + DC) > (BP + PD) + PC.$$

Mivel

$$AD + DC = AC \quad \Rightarrow \quad AB + PD + AC > BP + PD + PC.$$

Innen már adódik az állítás:

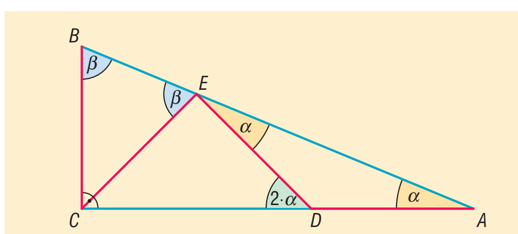
$$AB + AC > PB + PC.$$

1321 Legyen az ábra szerinti ABC derékszögű háromszög A csúcsánál lévő szöge α, B csúcsánál levő pedig β.
Az ADE háromszög egyenlő szárú, tehát

$$DEA\sphericalangle = \alpha.$$

A BCE háromszög egyenlő szárú, tehát

$$BEC\sphericalangle = \beta.$$



Mivel $\alpha + \beta = 90°$, az E pontnál csak akkor lehet egyenes szög, ha $CED\sphericalangle = 90°$. Tehát a CED háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, és $CDE\sphericalangle = 45°$.

A CDE szög viszont EDA háromszög külső szöge, ami egyenlő a nem mellette lévő két belső szög összegével:

$$CDE\sphericalangle = 2 \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 22{,}5°.$$

A háromszög hegyesszögei: $22{,}5°$ és $67{,}5°$.

1322 *a)* Az AOC egyenlő szárú háromszögben AOC szög $180°$ $\frac{3}{5}$ része:

$$AOC\sphericalangle = \frac{3}{5} \cdot 180° = 108° \quad \text{és} \quad CAO\sphericalangle = ACO\sphericalangle = \frac{180° - 108°}{2} = 36°.$$

A DOC egyenlő szárú háromszögben DOC szög $180°$ $\frac{1}{5}$ része:

$$DOC\sphericalangle = \frac{1}{5} \cdot 180° = 36° \quad \text{és} \quad DCO\sphericalangle = ODC\sphericalangle = \frac{180° - 36°}{2} = 72°.$$

A DMC háromszögben

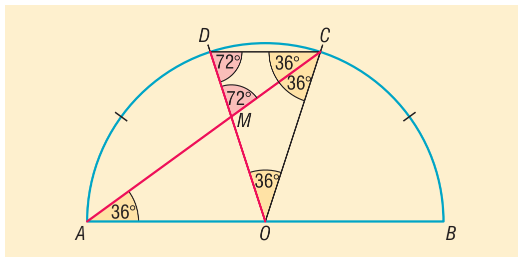
$$DCM\sphericalangle = 72° - 36° = 36° \quad \text{és} \quad DMC\sphericalangle = 180° - 72° - 36° = 72°.$$

b) Az előbbiek alapján DMC háromszög egyenlő szárú, mert szögei $72°$, $72°$ és $36°$. A háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, tehát $MC = DC = 10$ cm.

Az OMC háromszög is egyenlő szárú, mert $MOC\sphericalangle = MCO\sphericalangle = 36°$, ezért

$$OM = MC = 10 \text{ cm}.$$

Tehát $OM = 10$ cm.



1323 Nem. A háromszög-egyenlőtlenség alapján az egyik e átlóra teljesülnie kell:

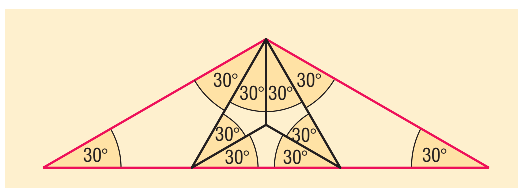
$$e < 7 + 8 = 15 \quad \text{és} \quad e < 11 + 9 = 20.$$

Tehát az egyik átlónak 15 cm-nél kisebbnek kell lennie. A másik f átlóra szintén teljesülnie kell, hogy

$$f < 8 + 11 = 19 \quad \text{és} \quad f < 9 + 7 = 16.$$

Tehát a másik átlónak 16 cm-nél kisebbnek kell lennie.

1324 Az ábrán látható felosztás megfelel a feladat feltételeinek.



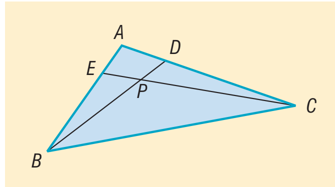
1325 Az $ABCD$ négyszögben az átlók metszéspontja legyen M. Az ABM, illetve CDM háromszögben a háromszög-egyenlőtlenségek:

$$AM + BM > AB, \quad \text{illetve} \quad CM + DM > CD.$$

Innen az állítás közvetlen adódik, hiszen $AM + BM + CM + DM$ éppen az átlók összege.



1326 Az ABD háromszögben az A-nál levő szög nem hegyesszög, tehát BD a háromszög legnagyobb oldala: $BD > BA$. Hasonlóan az AEC háromszög legnagyobb oldala CE, tehát $CE > AC$.



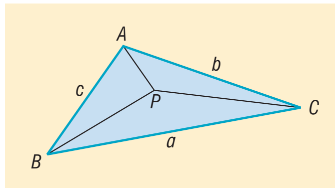
A két egyenlőtlenségből adódik:

$$BD + CE > BA + AC = (BE + EA) + (AD + DC) =$$
$$= BE + DC + (EA + AD).$$

Az AED háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség: $EA + AD > ED$. Tehát

$$BD + CE > BE + DC + ED.$$

1327 Az ábrán látható ABC háromszögben az oldalak a szokásos jelöléssel a, b és c.



Az APB, APC, illetve BPC háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$PA + PB > c, \quad PC + PB > a \quad \text{és} \quad PA + PC > b.$$

Ezekből következik, hogy:

$$2PA + 2PB + 2PC > a + b + c,$$
$$PA + PB + PC > \frac{a + b + c}{2}.$$

A P pontnak a csúcsoktól vett távolságösszege a háromszög félkerületénél nagyobb. Mivel P pont a háromszög egy belső pontja, az 1320. feladat alapján teljesül, hogy

$$PA + PB < a + b, \quad PC + PB < c + b \quad \text{és} \quad PA + PC < a + c.$$

Ezekből következik, hogy:

$$2PA + 2PB + 2PC < 2a + 2b + 2c,$$
$$PA + PB + PC < a + b + c.$$

A P pontnak a csúcsoktól vett távolságösszege a háromszög kerületénél kisebb.

Pitagorasz-tétel – megoldások

1328 A megadott adatokból a következő táblázatot kapjuk (➡):

Egyik befogó	Másik befogó	Átfogó
12 cm	5 cm	13 cm
65 cm	7,2 dm	970 mm
$\sqrt{3} \cdot a$	a	$2a$
b	b	$\sqrt{2} \cdot b$

1329 *a)* Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

b) Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

c) Nem lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

d) Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

1330 A Pitagorasz-tétel alapján nem lehet, mert a két páratlan befogó négyzetösszege páros, ami nem lehet a páratlan átfogó négyzete.

1331 A két ferde rúd hossza együtt $2 \cdot \sqrt{150^2 + 100^2} \approx 360{,}56$ cm.

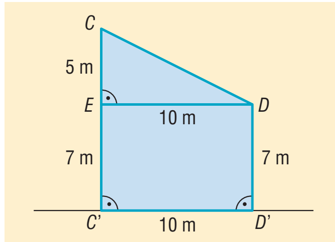
1332 Az alaphoz tartozó magasság 6 cm.

1333 Az ellensúly a tartóoszlop lábától 41 méterre, a darugém vége a tartóoszlop lábától 44 méterre van.



1334 A monitor képátmérője 17”.

1335 Az ábrán a két fát jelölje CC' és DD' szakasz. A CDE derékszögű háromszögben DC szakasz hosszát kell kiszámítani.



$$DC = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5 \cdot \sqrt{5} \approx 11{,}18,$$

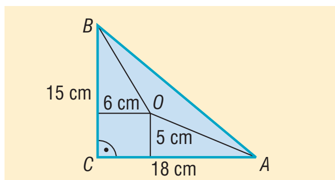
tehát a két fa csúcsa megközelítőleg 11,18 m távol van egymástól.

1336 *a)* Az OBC háromszög területe az ABC derékszögű háromszög területének harmadrésze. Mivel a két háromszög BC oldala közös, az OBC háromszög BC oldalhoz tartozó magassága az AC befogó harmada, vagyis $\frac{18}{3} = 6$ cm.

Hasonlóan az OAC háromszög területe az ABC derékszögű háromszög területének harmadrésze, így az OAC háromszög AC oldalhoz tartozó magassága a BC befogó harmada, vagyis $\frac{15}{3} = 5$ cm.

Az O pontnak a befogóktól vett távolsága tehát 6 és 5 cm.

b) Az előzőek alapján OC egy 6 és 5 cm oldalú téglalap átlója. Pitagorasz tétele alapján

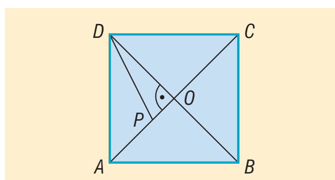


$$OC = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81 \text{ cm}.$$

1337 A háromszög területe egy b oldalú szabályos háromszög területével egyenlő:

$$T = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

1338 A küzdőtér legyen egy 8 m oldalú $ABCD$ négyzet. Tegyük fel, hogy a sportoló az AC átló A-hoz közelebbi P harmadolópontjában tartózkodik.



A P pontnak az A csúcstól vett távolsága az átló harmada:

$$AP = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \approx 3{,}77 \text{ m}.$$

A P pontnak a C csúcstól vett távolsága az átló kétharmada:

$$CP = \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}54 \text{ m}.$$

A négyzet átlóinak metszéspontja legyen O. Mivel a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást, a DOP háromszög derékszögű, és a DO szakasz a négyzet átlójának a fele:

$$DO = 4 \cdot \sqrt{2}.$$

A PO szakasz a négyzet átlójának a hatoda:

$$PO = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}.$$

A DOP háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt adódik, hogy

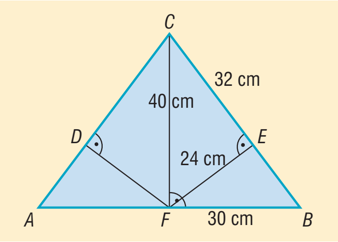
$$PD = \sqrt{PO^2 + OD^2} = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{5} \approx 5{,}96 \text{ m.}$$

Hasonlóan:

$$PB = 5{,}96 \text{ m.}$$

A sportoló a küzdőtér négy sarkától $3{,}77$, $5{,}96$, $7{,}54$ és $5{,}96$ m távolságra van.

1339 A CFB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel számítható BC oldal: $BC = 50$ cm.



A CFB háromszögben FE a CB oldalhoz tartozó magasság, így a háromszög területét kétféleképpen felírva FE-re adódik:

$$\frac{50 \cdot FE}{2} = \frac{40 \cdot 30}{2},$$
$$FE = 24 \text{ cm.}$$

A CFE derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$CE = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32 \text{ cm.}$$

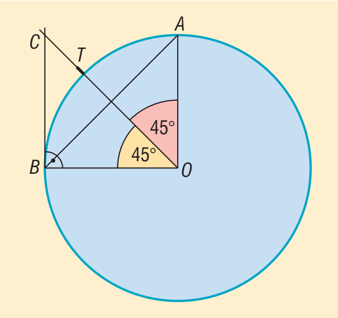
A $CEFD$ négyszög kerülete FE és CE szakaszok összegének a kétszerese:

$$2 \cdot (24 + 32) = 112 \text{ cm.}$$

A $CEFD$ négyszög területe az EFC derékszögű háromszög területének kétszerese:

$$2 \cdot \frac{24 \cdot 32}{2} = 768 \text{ cm}^2.$$

1340 Legyen az indulási pont A, az érkezési pont B, a gömb középpontja O.



a) A bolygó felszínén megtett út a főkör kerületének a negyed része:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} = \pi \approx 3{,}14 \text{ km.}$$

b) Az alagút hossza az AOB egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója. Mivel a háromszög befogója 2 km, Pitagorasz-tétel alapján:

$$AB = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}82 \text{ km.}$$

Az alagút hossza tehát 2,82 km.

c) A B érkezési pontból akkor nem láthatjuk a tornyot, ha a torony T ponttal jelölt teteje a főkörhöz B-ben húzott érintő egyenesének arra az oldalára esik, amelyik oldalon a kör van.

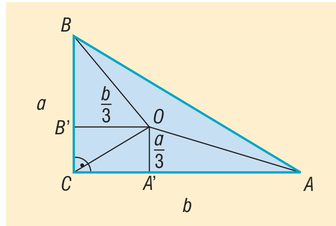
A T pont az AOB szög szögfelezőjén O-tól $2 + 0{,}1 = 2{,}1$ km-re van.

A szögfelező és az érintő metszéspontja legyen C. Az OBC egyenlő szárú derékszögű háromszögben a befogó 2 km, így

$$OC = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}82 \text{ km.}$$

Mivel $OC > OT$, a tornyot a kis herceg nem láthatja.

1341 Legyen $AC = b$ és $BC = a$. Az O pont AC-re, illetve BC-re eső merőleges vetülete legyen A', illetve B'.



Az 1336. feladat gondolatmenete alapján a területekből következik, hogy

$$OA' = \frac{a}{3} \quad \text{és} \quad OB' = \frac{b}{3}.$$

Az $OB'CA'$ téglalap átlójára felírva Pitagorasz tételét:

$$OC^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{9}.$$

Mivel $AA' = \dfrac{2b}{3}$, az AOA' derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele:

$$OA^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2.$$

Mivel $BB' = \dfrac{2a}{3}$, a BOB' derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele:

$$OB^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2.$$

Az előbbieket felhasználva:

$$OA^2 + OB^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{9}\right) = 5 \cdot OC^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

1342 Ha a derékszögű háromszög másik befogója b, és az átfogója c, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$225 + b^2 = c^2,$$
$$c^2 - b^2 = 225,$$
$$(c - b) \cdot (c + b) = 225.$$

Mivel $c - b$ kisebb, mint $c + b$, 225 lehetséges szorzattá alakításai a tényezők sorrendjét is figyelembe véve: $1 \cdot 225 = 3 \cdot 75 = 5 \cdot 45 = 9 \cdot 25$.

Ha $a - b = 1$ és $a + b = 225$, akkor $a = 113$ és $b = 112$.
Ha $a - b = 3$ és $a + b = 75$, akkor $a = 39$ és $b = 36$.
Ha $a - b = 5$ és $a + b = 45$, akkor $a = 25$ és $b = 20$.
Ha $a - b = 9$ és $a + b = 25$, akkor $a = 17$ és $b = 8$.

Tehát négy ilyen háromszög van.

Négyszögek – megoldások

1343 A konvex négyszögnek lehet, hogy:

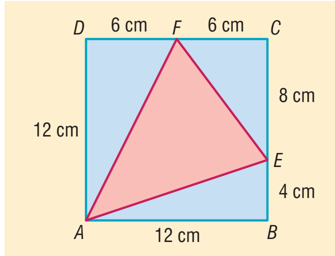
– nincs hegyesszöge, például téglalap;
– egy hegyesszöge van, például egy deltoid, melynek szögei 60º, 90º, 120º, 90º;
– két hegyesszöge van, például egy trapéz, melynek szögei 60º, 120º, 60º, 120º;
– három hegyesszöge van, például egy deltoid, melynek szögei 60º, 80º, 60º, 160º.

Négy hegyesszöge nem lehet, mert ekkor nem teljesülne, hogy a belső szögek összege 360º.



1344 Hamisak: *a*), *b*), *c*), *e*), *f*), *g*). Igazak: *d*), *h*).

1345 A háromszög oldalait Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:



$$AE = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4 \cdot \sqrt{10} \approx 12{,}65,$$
$$EF = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$
$$AF = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6 \cdot \sqrt{5} \approx 13{,}42.$$

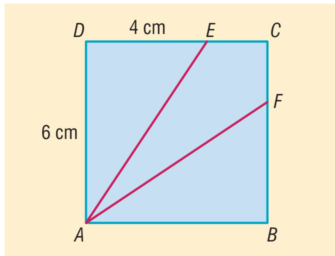
Az *AEF* háromszög kerülete:

$$AE + EF + AF = 36{,}07 \text{ cm}.$$

Az *AEF* háromszög területét megkaphatjuk úgy, hogy a négyzet területéből kivonjuk az *ABE*, *EFC* és *AFD* háromszögek területét:

$$12^2 - \frac{12 \cdot 4}{2} - \frac{8 \cdot 6}{2} - \frac{12 \cdot 6}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

1346 Legyen *ABCD* a 6 cm oldalú négyzet. Az *A* csúcson áthaladó, a területet harmadoló egyenesek közül az egyik a *DC* oldalt *E*-ben, a másik a *BC* oldalt *F*-ben metszi.



Az *ADE* háromszög területe a négyzet területének harmada, tehát 12 cm^2.

$$\frac{6 \cdot DE}{2} = 12 \quad \Rightarrow \quad DE = 4 \text{ cm}.$$

Pitagorasz-tételt használva az *ADE* háromszögben:

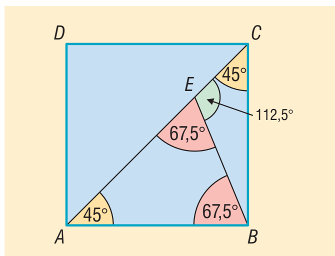
$$AE = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7{,}21 \text{ cm}.$$

Ugyanígy:

$$AF = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7{,}21 \text{ cm}.$$

Tehát a két egyenesnek a négyzet belsejébe eső szakasza 7,21 cm.

1347 Tekintsük az *ABCD* négyzetet. Az *AC* átlójára mérjük fel a négyzet oldalának a hosszát *A*-ból kiindulva, így az *E* pontot kapjuk.



Mivel a négyzet átlói az oldalakkal 45°-os szöget zárnak be, az *ABE* egyenlő szárú háromszög szárszöge 45°, az alapon lévő szögei:

$$\frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°.$$

Ennek a szögnek a külső szöge 112,5°.

Az *EBC* háromszög *EC* oldalán fekvő szögek: 112,5° és 45°.

Ezek alapján a szerkesztést az *EBC* háromszöggel kezdjük, mert adott az *EC* oldala, és ismerjük a rajta fekvő két szöget. Az *EBC* háromszögnek a *BC* oldala a négyzet oldala, aminek ismeretében a négyzet már szerkeszthető.

A feladatnak mindig van megoldása.

1348 A téglalap átlói az oldalakkal:

a) 35° és 55°; *b*) $\frac{\varphi}{2}$ és $90° - \frac{\varphi}{2}$ nagyságú szöget zárnak be.

1349 A rombusz szögei $48°$ és $132°$.

1350 A rombusz szögei $30°$ és $150°$.

1351 Három eset lehetséges:

a) $102°$, $109°$, $40°$ és $109°$; *b)* $40°$, $102°$, $116°$ és $102°$; *c)* $102°$, $40°$, $178°$ és $40°$.

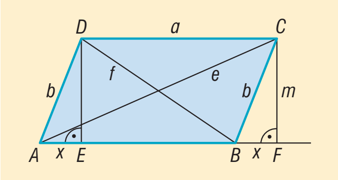
1352 A hosszabbik átló a 10 cm-es átlót két egyenlő részre osztja. A hosszabbik átló szeletei az arányból adódóan 15 cm és 9 cm. Pitagorasz tétele alapján az oldalak:

$$a = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106} \approx 10{,}30 \text{ cm} \quad \text{és} \quad b = \sqrt{5^2 + 15^2} = 5 \cdot \sqrt{10} \approx 15{,}81 \text{ cm}.$$

1353 A paralelogramma belső szögei $80°$, $100°$.

1354 A paralelogramma belső szögei $108°$ és $72°$.

1355 Az $ABCD$ paralelogrammának az A csúcsánál levő szöge legyen hegyesszög. A paralelogramma oldalai $AB = a$ és $BC = b$, átlói $AC = e$ és $BD = f$, az AB oldalhoz tartozó magassága m.



Húzzunk merőlegest a C és a D csúcsokból az AB oldal egyenesére. A merőlegesek talppontjai legyenek F és E. Az F pont az AB oldalon kívül, az E pont az oldalon van.

Jelölje az AE és a BF egyenlő szakaszok hosszúságait x.

A BFC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$b^2 = m^2 + x^2.$$

Az AFC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$e^2 = m^2 + (a + x)^2.$$

A BED derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$f^2 = m^2 + (a - x)^2.$$

Ezeket felhasználva az átlók négyzetösszege:

$$e^2 + f^2 = 2m^2 + (a + x)^2 + (a - x)^2 = 2m^2 + 2x^2 + 2a^2 =$$
$$= 2 \cdot (m^2 + x^2) + 2a^2 = 2b^2 + 2a^2.$$

Ha a paralelogrammának az A csúcsánál levő szöge tompaszög, a bizonyítás hasonló módon történik.

Ha a paralelogramma téglalap, akkor is az átlók négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő.

1356 Mivel a paralelogramma köré kör írható, átlói egyenlő hosszúak, tehát téglalap.

A téglalap átlójának hossza Pitagorasz-tétellel számítható:

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}.$$

A téglalap köré írható kör sugara az átló fele, vagyis 6,5 cm.

1357 Nincs konkáv trapéz, mert a trapéz egy száron nyugvó belső szögeinek összege $180°$.

1358 Mivel a két adott szög összege nem $180°$, ezért ezek a szögek nem lehetnek egy száron nyugvó szögek. A trapéz másik két szöge: $180° - 38° = 142°$ és $180° - 102° = 78°$.

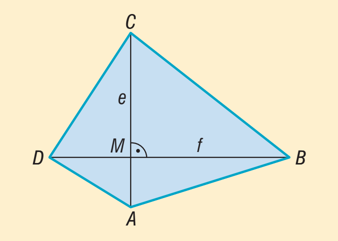
1359 Két megoldás lehetséges, amelyek a következő táblázatból olvashatók ki. Felhasználtuk az oldalhosszak kiszámításánál, hogy ha egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója a, akkor az átfogója $a \cdot \sqrt{2}$.

Derékszögű szár	Másik szár	Rövidebb alap	Hosszabb alap
6 cm	$6 \cdot \sqrt{2}$ cm	10 cm	16 cm
6 cm	$6 \cdot \sqrt{2}$ cm	16 cm	22 cm



1360 Az $ABCD$ konvex négyszögben az átlók metszéspontja legyen M.A négyszöget az átlói négy derékszögű háromszögre bontják.

A négyszög területét a négy derékszögű háromszög területének összegeként számíthatjuk:

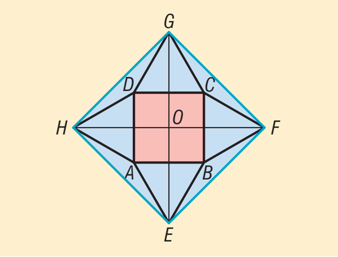


$$T=\frac{AM\cdot BM}{2}+\frac{BM\cdot CM}{2}+\frac{CM\cdot DM}{2}+\frac{DM\cdot AM}{2}=$$
$$=\frac{BM}{2}\cdot(AM+CM)+\frac{DM}{2}\cdot(CM+AM)=$$
$$=\frac{(AM+CM)\cdot(BM+DM)}{2}=\frac{AC\cdot BD}{2}.$$

Tehát a négyszög területe $\frac{e\cdot f}{2}$.

A feladat állítása akkor is igaz, ha a négyszög nem konvex.

1361 Tekintsük az ábrán látható jelöléseket.



Az $EFGH$ négyszög négyzet, mert átlói egyenlő hosszúak, illetve merőlegesek egymásra.

Az $EFGH$ négyzetben a HF átló az $ABCD$ négyzet oldalának és két 18 cm oldalú szabályos háromszög magasságának az összege:

$$HF=18+2\cdot\frac{18\cdot\sqrt{3}}{2}=18\cdot\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Az $EFGH$ négyzet területe az átlók szorzatának a fele:

$$T_{EFGH\text{ négyzet}}=\frac{HF^2}{2}\approx 1209{,}18\text{ cm}^2.$$

Az $EFGH$ négyzet EF oldala az EOF egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója. Ennek a háromszögnek a befogója:

$$OF=\frac{HF}{2}=9\cdot\left(1+\sqrt{3}\right).$$

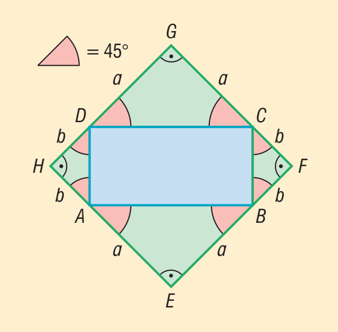
Az EOF egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója a befogó $\sqrt{2}$-szerese,

$$EF=OF\cdot\sqrt{2}\approx 34{,}77\text{ cm}.$$

Az $EFGH$ négyzet kerülete:

$$K_{EFGH\text{ négyzet}}=4\cdot EF\approx 4\cdot 34{,}77=139{,}08\text{ cm}.$$

1362 Az ábrán látható $ABCD$ téglalap oldalaira rajzolt egyenlő szárú derékszögű háromszögek csúcsai E, F, G és H.



Mivel az egyenlő szárú derékszögű háromszög alapon fekvő szögei 45°-osak, F, C és G pontok egy egyenesbe esnek. Hasonlóan igaz ez a többi ponthármas esetében is.

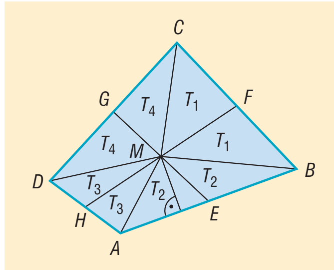
A téglalap és a háromszögek négyszöget határoznak meg.

Ennek az $EFGH$ négyszögnek minden szöge derékszög, tehát téglalap.

Az ábra jelöléseit használva az $EFGH$ téglalap minden oldala $a+b$ hosszúságú, tehát négyzet.



1363 Az $ABCD$ négyszög oldalainak felezőpontjai az ábra jelöléseit használva E, F, G és H. A szemben levő oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok metszéspontja M.



Az AME és a BME háromszögek területe egyenlő, mivel AE, illetve BE oldalai egyenlő hosszúak, valamint ezen oldalakhoz tartozó magasságok megegyeznek.

A többi háromszög esetében is ezt végiggondolva adódik, hogy:

$t_{MEBF\text{ négyszög}} + t_{MGDH\text{ négyszög}} = t_{MFCG\text{ négyszög}} + t_{MHAE\text{ négyszög}}.$

A feladatban három négyszög területét adták meg, így a hiányzó negyedik négyszög területére a következő összefüggések valamelyike érvényes:

$$15 + 20 = 25 + x \quad \Rightarrow \quad x = 10 \quad \Rightarrow \quad t_{ABCD\text{ négyszög}} = 70\text{ cm}^2,$$
$$15 + 25 = 20 + y \quad \Rightarrow \quad y = 20 \quad \Rightarrow \quad t_{ABCD\text{ négyszög}} = 80\text{ cm}^2,$$
$$25 + 20 = 15 + z \quad \Rightarrow \quad z = 30 \quad \Rightarrow \quad t_{ABCD\text{ négyszög}} = 90\text{ cm}^2.$$

A négyszög területe lehet 70, 80 vagy 90 cm^2.

1364 Az átlók metszéspontja a megfelelő pont.

A négyszög csúcsai legyenek A, B, C és D. A sík egy P pontjára igaz, hogy $PA + PC \geq AC$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P pont rajta van az AC átlón;

Hasonlóan $PB + PD \geq BD$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P pont rajta van a BD átlón.

Ebből következik, hogy

$$PA + PC + PB + PD \geq AC + BD.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P rajta van az AC, illetve a BD átlók mindegyikén, vagyis P pont éppen az átlók metszéspontja.

Sokszögek – megoldások

1365 A helyesen kitöltött táblázat:

A sokszög oldalainak száma	A sokszög egyik csúcsából kiinduló átlóinak a száma	A sokszög belső szögeinek összege
10	7	1440°
18	15	2880°
24	21	3960°
n	$n - 3$	$(n - 2) \cdot 180°$
$a + 3$	a	$(a + 1) \cdot 180°$
$\frac{\varphi}{180°} + 2$	$\frac{\varphi}{180°} - 1$	φ

1366 Egy n oldalú konvex sokszög egy külső szöge mindig kisebb, mint 180°, és a belső szögeinek összege 180° egész számú többszöröse: $(n - 2) \cdot 180°$.

Mivel $2283° = 12 \cdot 180° + 123° = (14 - 2) \cdot 180° + 123°$, a külső szög csak 123° lehet, és a sokszög 14 oldalú.

1367 Az *a)* és *c)* igaz, a *b)* és *d)* hamis.



1368 A helyesen kitöltött táblázat:

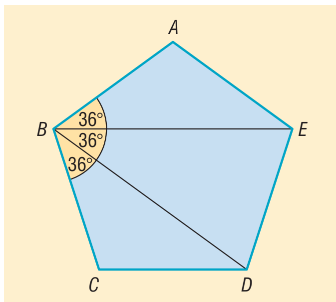
A szabályos sokszög oldalainak száma	A szabályos sokszög egy belső szöge	A szabályos sokszög egy külső szöge
20	162°	18°
10	144°	36°
9	140°	40°
n	$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$	$\frac{360°}{n}$
$\frac{360°}{180°-\alpha}$	α	$180°-\alpha$
$\frac{360°}{\beta}$	$180°-\beta$	β

1369 Egy konvex hatszög átlóinak legfeljebb 15 darab csúcsoktól különböző metszéspontja lehet.

1370 Egy szabályos hatszög átlóinak pontosan 13 darab csúcsoktól különböző metszéspontja van.

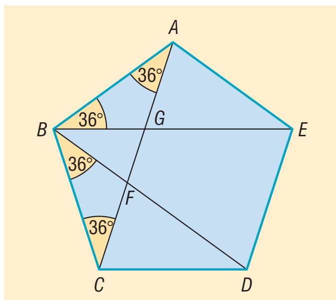
1371 A legrövidebb átló és a szabályos hatszög két oldala olyan egyenlő szárú háromszöget határoz meg, amelynek szárszöge 120º. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1372 A szabályos ötszög egy csúcsából kiinduló átlói 36º-os szöget zárnak be.



1373 Az 1372. feladat alapján $ABG\sphericalangle = GAB\sphericalangle = 36º$. A $BGF\sphericalangle$ a BGA háromszög külső szöge, tehát $36º + 36º = 72º$. Ugyanígy megmutatható, hogy $GFB\sphericalangle = 72º$.

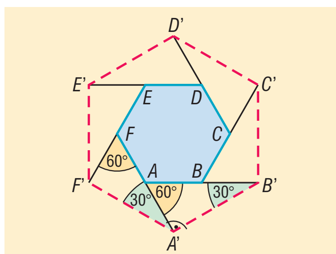
Tehát a BGF háromszög szögei: 72º, 72º, 36º.



1374 *a)* Az $ABCDEF$ szabályos hatszög egy külső szöge $F'FA'\sphericalangle = 60º$ és $FA' = 2FF'$. Ebből következik, hogy az $F'FA'$ háromszög fél szabályos háromszög, amelynek az A'-nél lévő szöge 30º.

Ugyanígy az $A'AB'$ háromszög is fél szabályos háromszög, és az A'-nél lévő szöge 90º. Ez azt jelenti, hogy az $A'B'C'D'E'F'$ hatszögnek az A'-nél lévő szöge $30º + 90º = 120º$-os.

A hatszög többi szögéről hasonló módon belátható, hogy szintén 120º-os.



b) A keletkezett hatszög minden oldala egy 24 cm oldalú szabályos háromszög magassága, vagyis

$$24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\cdot\sqrt{3}\text{ cm.}$$

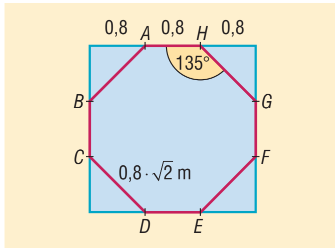
Az $A'B'C'D'E'F'$ hatszög minden szöge és minden oldala egyenlő, tehát szabályos. Így a kerület:

$$K_{A'B'C'D'E'F'\text{ hatszög}}=6\cdot12\cdot\sqrt{3}\approx124{,}71\text{ cm.}$$

c) Az $A'B'C'D'E'F'$ hatszög területe 6 darab $12\cdot\sqrt{3}$ cm oldalú szabályos háromszög területének az összege:

$$T_{A'B'C'D'E'F'\text{ hatszög}}=6\cdot\frac{\left(12\cdot\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=648\cdot\sqrt{3}\approx1122{,}37\text{ cm}^2.$$

1375 *a)* A nyolcszög minden szöge 135°.



b) Nem szabályos a nyolcszög, mert oldalai nem egyenlő hosszúak. Ugyanis BC a négyzet oldalának harmadrésze, AB pedig a harmadrész $\sqrt{2}$-szöröse.

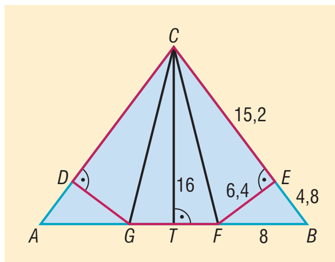
c) A kerület:

$$K_{\text{nyolcszög}}=4\cdot0{,}8\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\approx7{,}73\text{ m.}$$

d) A nyolcszög területét megkapjuk úgy, hogy az eredeti négyzet területéből kivonjuk két 0,8 m oldalú négyzet területét.

$$T_{\text{nyolcszög}}=2{,}4^2-2\cdot0{,}8^2=4{,}48\text{ m}^2.$$

1376 Legyen T az AB alap felezéspontja. A Pitagorasz-tétel alapján a BCT derékszögű háromszögből $BC=20$ cm.



Az FBC háromszög FB oldala 8 cm, a hozzá tartozó CT magasság 16 cm. Az FBC háromszög BC oldala 20 cm, a hozzá tartozó magassága FE. Ennek a háromszögnek a területe kétféleképpen számolható:

$$\frac{8\cdot16}{2}=\frac{FE\cdot20}{2}\quad\Rightarrow\quad FE=6{,}4\text{ cm.}$$

A BEF derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$EB=\sqrt{8^2-6{,}4^2}=4{,}8\quad\Rightarrow\quad CE=15{,}2\text{ cm.}$$

Hasonlóan $DG=6{,}4$ cm és $DC=15{,}2$ cm.

A $CEFGD$ ötszög területe a GDC, FEC és FGC háromszögek területének összege:

$$T_{CEFGD\text{ ötszög}}=\frac{8\cdot16}{2}+2\cdot\frac{6{,}4\cdot15{,}2}{2}=161{,}28\text{ cm}^2.$$

A $CEFGD$ ötszög kerülete:

$$K_{CEFGD\text{ ötszög}}=GF+2\cdot(FE+CE)=51{,}2\text{ cm.}$$

1377 A 25 háromszög belső szögeinek összege $25\cdot180°$. Az ötszög belsejében lévő egy háromszög-csúcsnál a szögek összege 360°. Ha n csúcs esik az ötszögön belül, akkor a háromszög belső szögeinek összegét úgy is számolhatjuk, hogy 360° n-szereséhez hozzáadjuk az ötszög belső szögeinek összegét. Így n-re a következő egyenlethez jutunk:

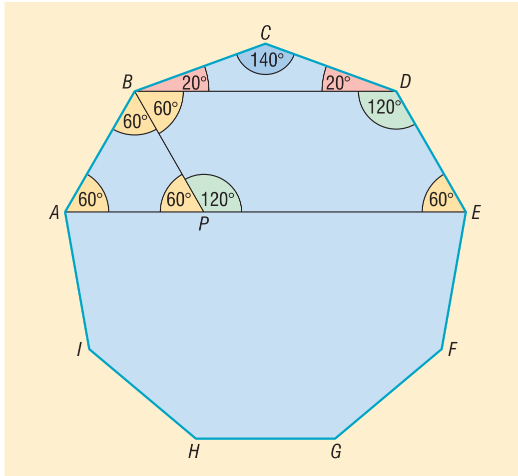
$$25\cdot180°=n\cdot360°+540°\quad\Rightarrow\quad n=11.$$

Az ötszög belsejébe 11 háromszög-csúcs esik.

1378 Az ábrán látható $ABCDEFGHI$ szabályos kilencszög egy belső szöge 140°. Egyik legrövidebb átlója BD, egyik leghosszabb átlója pedig AE.

A BCD egyenlő szárú háromszög szárszöge egyúttal a szabályos kilencszög egyik belső szöge is, tehát 140°. Továbbá: $BDC\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 20°$, valamint $BDE\sphericalangle = DBA\sphericalangle = 140° - 20° = 120°$.

A szabályos kilencszög C csúcsán áthaladó szimmetriatengelyére merőleges a sokszög BD és AE átlója, tehát az $ABDE$ négyszög olyan húrtrapéz, amelynek belső szögei 60°, illetve 120°.



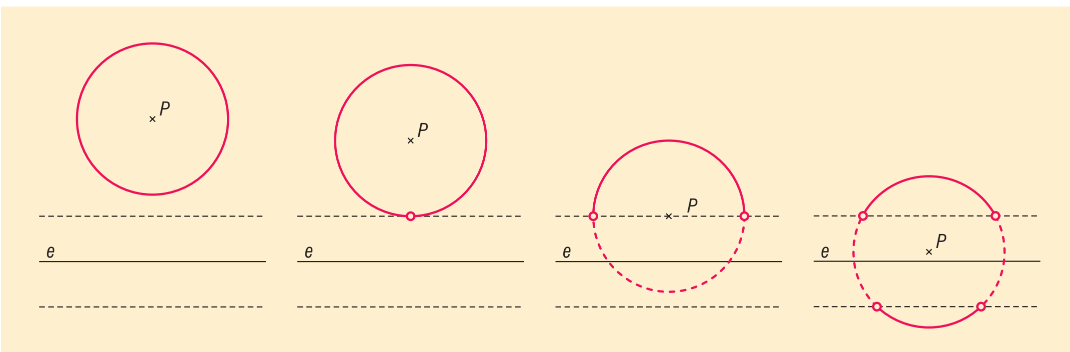
Legyen az AE leghosszabb átlónak P egy olyan belső pontja, amelyre igaz, hogy a $BDEP$ négyszög paralelogramma. A szögekből adódóan az APB háromszög szabályos, és az oldala éppen a kilencszög egy oldala.

Mivel a paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak, EP a legrövidebb átlóval egyenlő hosszú, és a szabályos háromszögből adódóan PA a szabályos kilencszög oldala.

Mivel $AE = AP + PE$, az állításunk igaz.

Nevezetes ponthalmazok – megoldások

1379 Legyen az adott pont P, az adott egyenes e.



Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm-nél nagyobb, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 5 cm sugarú körvonal pontjai.

Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 5 cm sugarú körvonal pontjai, kivéve a kör e-hez legközelebbi pontját.

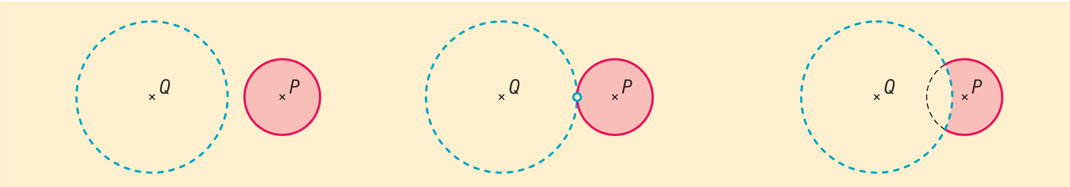
Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm-nél kisebb, de 2 cm-nél nem kisebb, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 5 cm sugarú körvonal egy nyílt ívének pontjai.

Ha a pont és egyenes távolsága 2 cm-nél kisebb, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 5 cm sugarú körvonal két nyílt ívének pontjai.

1380 A pontok halmaza az a körvonal, amelynek középpontja a két koncentrikus kör közös középpontja, sugara a két kör sugarának számtani közepe.

1381 Ha P és Q távolsága nagyobb, mint 10 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 4 cm sugarú zárt körlap pontjai.

Ha P és Q távolsága 10 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 4 cm sugarú zárt körlap pontjai, kivéve a körlap Q-hoz legközelebb eső pontját.



Ha P és Q távolsága kisebb, mint 10 cm, de nagyobb, mint 2 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 4 cm sugarú zárt körlapnak az ábrán látható pontjai.

Ha P és Q távolsága 2 cm-nél kisebb vagy egyenlő, nincs ilyen pont.

1382 Egy szakasz mint alap fölé emelt egyenlő szárú háromszög harmadik csúcsa, egyenlő távol van az alap két végpontjától, így a harmadik csúcs az alap felezőmerőlegesén van.

Ha a két szakasz nem párhuzamos, akkor a két szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja az egyenlő szárú háromszögek közös pontja.

Ha a két szakasz párhuzamos, és felezőmerőlegeseik egybeesnek, akkor a közös felezőmerőleges minden pontja megfelel a közös csúcsnak, kivéve a két szakasz felezőpontja.

Ha a két szakasz párhuzamos, és felezőmerőlegeseik párhuzamosak, de nem esnek egybe, akkor nem lehet ilyen háromszögeket szerkeszteni.

1383 Egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így a szerkesztendő kör középpontja rajta van az egyenesre E-ben állított merőlegesen.

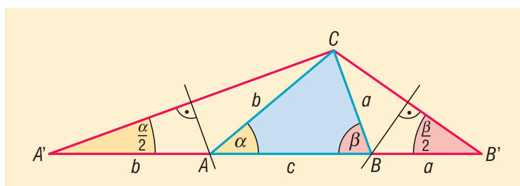
Ismert, hogy egy kör húrjának felezőmerőlegese tartalmazza a kör középpontját, így a PE szakasz felezőmerőlegese tartalmazza a szerkesztendő kör középpontját.

Ezek alapján a szerkesztés menete:

1. az adott egyenesre E-ben merőlegest állítunk;
2. megszerkesztjük a PE szakasz felezőmerőlegesét;
3. a két egyenes metszéspontja lesz a kör középpontja, sugara a középpont és E távolsága;
4. ez alapján a körvonal megrajzolható.

A feladatnak mindig egy megoldása van.

1384 Az 1314. feladat alapján történhet a szerkesztés.



Mivel az $A'AC$ háromszög egyenlő szárú, így az A csúcs rajta van az $A'C$ szakasz felezőmerőlegesén. Hasonlóan a B csúcs rajta van a $B'C$ szakasz felezőmerőlegesén.

A szerkesztés menete:

1. Szerkesszük meg azt az $A'B'C$ háromszöget, amelynek az $A'B'$ oldala a kerülettel egyenlő hosszú, és az A'-nél lévő szöge $\frac{\alpha}{2}$, a B'-nél lévő szöge $\frac{\beta}{2}$.
2. Az $A'C$ szakasz felezőmerőlegesének az $A'B'$-vel való metszéspontja adja A pontot.
3. A $B'C$ szakasz felezőmerőlegesének az $A'B'$-vel való metszéspontja adja B pontot.

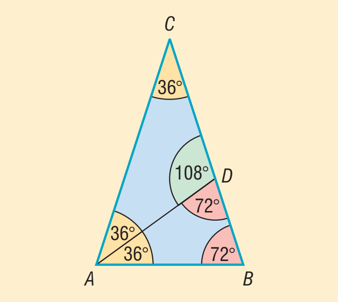
A feladatnak mindig van megoldása, ha a két megadott szög összege 180°-nál kisebb.



1385 Kettő olyan pont van, amelyik mind a három egyenestől egyenlő távol van.

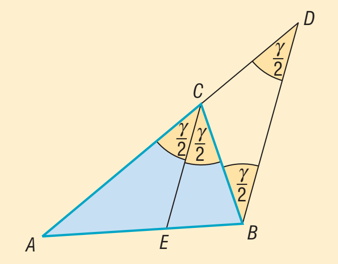
1386 Az AD átfogójú fél szabályos háromszögből adódóan $AD = 10$ cm.

1387 Ha a szárszög 36°, akkor az alapon fekvő szögek 72°-osak. Az alapon lévő egyik szög szögfelezője az ábrán látható módon két egyenlő szárú háromszögre bontja az eredeti háromszöget.



1388 Mivel CE párhuzamos BD-vel, párhuzamos szárú szögek keletkeznek. A CBD szög és a CDB szög is a C csúcsnál lévő szög fele, vagyis a BCD háromszög egyenlő szárú. (➡)

Egy háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, tehát $DC = BC$.



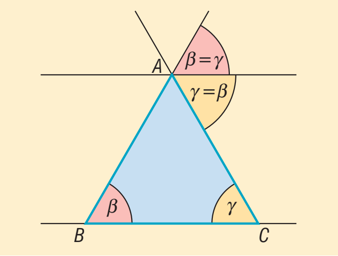
1389 A négyzet átfogóra eső csúcsa egyenlő távol van a két befogótól, így rajta van a derékszögű csúcs szögfelezőjén. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1390 A félkör középpontja, amely a háromszög egyik oldalára esik, egyenlő távol van a másik két oldaltól, így a félkör középpontja rajta van a másik két oldal által bezárt belső szög szögfelezőjén. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1391 Tekintsük az ábra jelöléseit. (➡)

A párhuzamosságból következik, hogy az A-nál lévő külső szög éppen a B-nél, illetve a C-nél lévő belső szögeknek is kétszerese. Ebből adódik, hogy a B-nél és C-nél levő belső szögek egyenlők.

Az ABC háromszög egyenlő szárú és $AB = AC$.



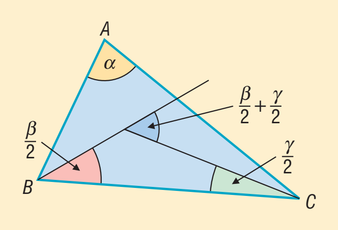
1392 A szögfelezők által bezárt szög 57°.

1393 *a)* A másik két belső szög szögfelezőinek hajlásszöge 66°.

b) Az ABC háromszög szögei a szokásos jelölésekkel legyen α, β és γ. A β és γ szögek szögfelezőinek metszéspontját jelölje O.

Az OBC háromszög B-nél és C-nél lévő belső szöge $\frac{\beta}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$.

Ennek a háromszögnek az O csúcsnál levő külső szöge $\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}$, ami éppen a két szögfelező hajlásszöge.



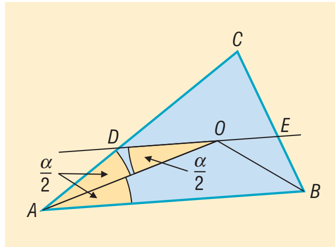
Mivel az ABC háromszög belső szögeinek összege 180°, a két szögfelező hajlásszöge:

$$\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

1394 A külső szögek rendre 132°, 106°, illetve 122°. A külső szögfelezők által meghatározott háromszög belső szögei ezek felének páronként vett összegét egészítik ki 180°-ra. Így a szögek:

$$180° - \frac{132° + 106°}{2} = 61°, \quad 180° - \frac{132° + 122°}{2} = 53°, \quad 180° - \frac{122° + 106°}{2} = 66°.$$

1395 Az ABC háromszög A és B csúcsnál lévő belső szögfelezők metszéspontja legyen O. Mivel DE párhuzamos AB-vel, a DOA és az OAB szögek váltószögek:

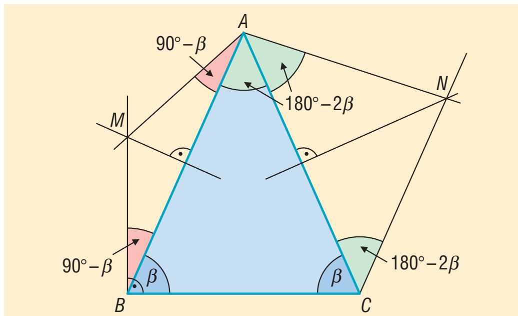


$$DOA\sphericalangle = OAB\sphericalangle = DAO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az ADO háromszög egyenlő szárú. Egy háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, ezért $DO = DA = 5$ cm. Ugyanígy adódik, hogy $OE = EB = 4$ cm.

Tehát a DE szakasz hossza 9 cm.

1396 Ha az ábrán látható ABC háromszögben az $ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \beta$, akkor a $BAC\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \beta$.



Mivel az MB merőleges a háromszög BC oldalára, $ABM\sphericalangle = 90° - \beta$.

Az M pont rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén, tehát az AMB háromszög egyenlő szárú: $MBA\sphericalangle = BAM\sphericalangle = 90° - \beta$.

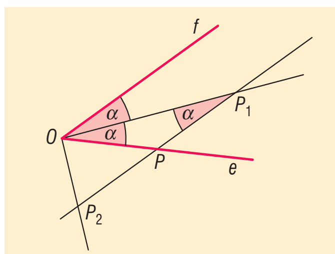
Az NC párhuzamos AB-vel, tehát az ACN és a BAC szögek váltószögek: $BAC\sphericalangle = ACN\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \beta$.

Az N pont rajta van az AC szakasz felezőmerőlegesén, tehát az ACN háromszög is egyenlő szárú: $ACN\sphericalangle = CAN\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \beta$.

Az A csúcsnál lévő szögek összege $2 \cdot (180° - 2 \cdot \beta) + 90° - \beta = 450° - 5 \cdot \beta$, ami éppen 120° a feladat feltétele szerint. Ebből $\beta = 66°$.

A háromszög szögei: 66°, 66°, 48°.

1397 A szög csúcsa legyen O, a szögszárak pedig e, illetve f félegyenesek. A P pont az e szögszár egy tetszőleges pontja.



Legyen P_1 a szögtartományban az a pont, amelyre PP_1 párhuzamos az f szögszárral és $PP_1 = OP$.

Az OPP_1 háromszög egyenlő szárú, és az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak: $PP_1O\sphericalangle = P_1OP\sphericalangle = \alpha$.

A párhuzamosság miatt az f szögszár az OP_1 egyenesével, szintén α nagyságú szöget zár be, tehát P_1 pont rajta van a szögfelezőn.

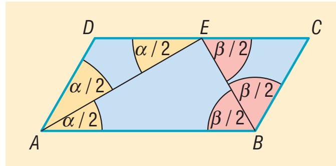
Tekintsük a szögfelező egy tetszőleges Q pontját. Húzzunk párhuzamost Q-n keresztül az f szögszárral, és vegyük a párhuzamos és e egyenes metszéspontját. A metszéspontból kiindulva, a feladat utasításait követve éppen a Q ponthoz jutunk. Tehát a szögfelező minden pontja hozzá tartozik az adott tulajdonságú pontok halmazához.

Legyen P_2 a szögtartományon kívül az a pont, amelyre PP_2 párhuzamos az f szögszárral és $PP_2 = OP$. Belátható, hogy a P_2 pontok halmaza az adott szög mellékszögének szögfelezője.

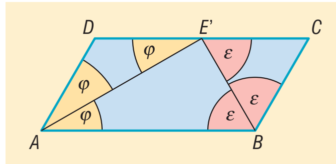
A feladatban szereplő pontok halmaza a szögtartomány szögfelezője és a mellékszögének szögfelezője. (A szög és mellékszög közös szögszára tartalmazza P-t.)



1398 Ha a szögfelezők a DC oldal E felezőpontjában metszik egymást, akkor a szögfelezés miatt $BAE\sphericalangle = EAD\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$. Mivel a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, a BAE és a DEA szögek váltószögek, tehát $BAE\sphericalangle = DEA\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$. Ez azt jelenti, hogy az AED háromszög egyenlő szárú, vagyis $DE = AD$. Ugyanígy $BC = CE$, tehát $DC = 2BC$.



Ha $DC = 2BC$, és E' pont a DC felezőpontja, akkor $AD = DE'$, vagyis az ADE' háromszög egyenlő szárú. A háromszögben az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, tehát $DAE'\sphericalangle = DE'A\sphericalangle = \varphi$. Mivel AB párhuzamos DC-vel, $DE'A$ és $E'AB$ szögek váltószögek, tehát $DE'A\sphericalangle = E'AB\sphericalangle = \varphi$. Hasonlóan $ABE'\sphericalangle = E'BC\sphericalangle = \varepsilon$.



Tehát AE' a BAD, és BE' az ABC szög szögfelezője, vagyis az ABC és BAD szögek szögfelezői DC felezőpontjában, E'-ben metszik egymást.

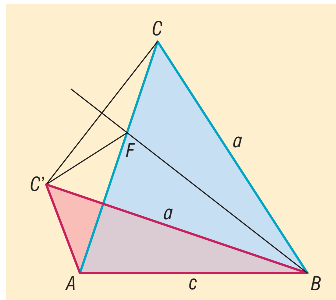
1399 Az ABC, illetve az ABC' háromszögekben $BC = BC'$. A két háromszög közül az elsőben legyen nagyobb a B-nél lévő szög, mint a másodikban. Bizonyítandó, hogy $AC' < AC$.

A CBC' szög felezője az ABC' háromszögön kívül halad, és messe az AC oldalt egy F pontban. Ekkor igaz, hogy $CF = C'F$.

Az $AC'F$ háromszögben felírva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$AC' < AF + FC' = AF + FC = AC.$$

Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

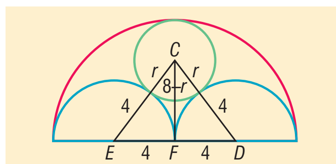


1400 Használjuk a következő ábra jelöléseit.

A kis kör sugara legyen r.

A kisebbik félkörök sugara 4 cm, tehát $FE = FD = 4$ cm.

A kis kör belülről érinti a nagy félkört, ezért középpontjaik távolsága: $CF = 8 - r$.



A kis kör kívülről érinti a kisebbik félköröket, ezért középpontjaik távolsága: $CE = CD = 4 + r$.

A CFE derékszögű háromszögben felírva Pitagorasz tételét:

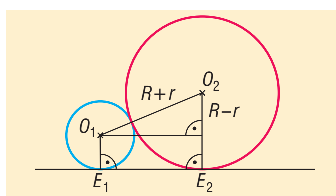
$$(4 + r)^2 = (8 - r)^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{8}{3}.$$

A legkisebb kör sugara $\dfrac{8}{3}$ cm.

1401 *a)* Az $r = 4$ cm sugarú kör középpontja O_1, az egyenessel vett érintési pontja E_1.

Az $R = 9$ cm sugarú kör középpontja O_2, az egyenessel vett érintési pontja E_2.

Az $O_1O_2E_2E_1$ négyszög derékszögű trapéz, alapjai r és R. A nem derékszögű szár hossza $r + R$.



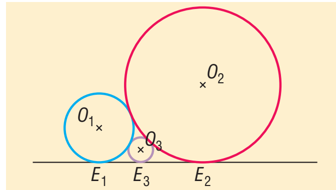
A derékszögű szárat az ábra alapján Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$E_1E_2 = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = \sqrt{4 \cdot R \cdot r} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} \quad \Rightarrow \quad E_1E_2 = 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 9} = 12 \text{ cm}.$$

Az érintési pontok távolsága 12 cm.

b) Ha két r és R sugarú kör érint egy egyenest és érintik egymást is, akkor az előző gondolatmenet alapján az érintési pontok távolsága:

$$E_1E_2 = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}.$$



Ha a keresett kör x sugara kisebb mind a két kör sugaránál, és az egyenessel vett érintési pontja E_3, akkor az előzőek alapján:

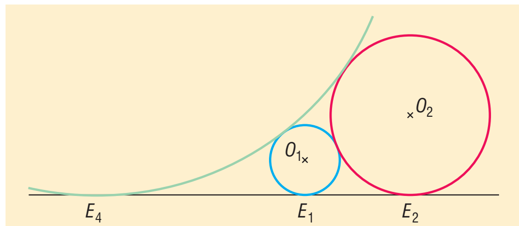
$$E_1E_3 = 2 \cdot \sqrt{4x} = 4 \cdot \sqrt{x}, \quad E_3E_2 = 2 \cdot \sqrt{9x} = 6 \cdot \sqrt{x}, \quad E_1E_2 = 12.$$

Így:

$$E_1E_3 + E_3E_2 = E_1E_2 \;\Rightarrow\; 4 \cdot \sqrt{x} + 6 \cdot \sqrt{x} = 12 \;\Rightarrow\; x = 1{,}44 \text{ cm}.$$

A kisebb keresett kör sugara 1,44 cm.

Ha a keresett kör y sugara nagyobb mind a két kör sugaránál, és az egyenessel vett érintési pontja E_4, akkor az előzőek alapján:



$$E_4E_1 = 2 \cdot \sqrt{4y} = 4 \cdot \sqrt{y},$$
$$E_4E_2 = 2 \cdot \sqrt{9y} = 6 \cdot \sqrt{y},$$
$$E_1E_2 = 12.$$

Így:

$$E_4E_2 - E_4E_1 = E_1E_2 \;\Rightarrow\; 6 \cdot \sqrt{y} - 4 \cdot \sqrt{y} = 12 \;\Rightarrow\; y = 36 \text{ cm}.$$

A nagyobb keresett kör sugara 36 cm.

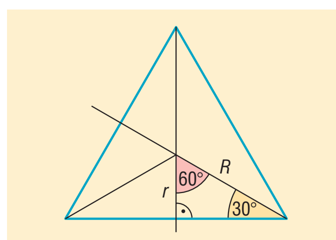
Háromszög beírt és köré írt köre – megoldások

1402 A beírt kör középpontját a belső szögfelezők metszéspontja, a körülírt kör középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontja adja.

1403 *a)* A szerkesztés elvégezhető, ha figyelembe vesszük, hogy ha a körülírt kör középpontját összekötjük a csúcsokkal, akkor ezek a sugarak 120°-os szöget zárnak be egymással.

b) A szerkesztés elvégezhető, ha figyelembe vesszük, hogy ha a beírt kör középpontját összekötjük az oldalakkal vett érintési pontokkal, akkor ezek a sugarak 120°-os szöget zárnak be egymással.

1404 A szabályos háromszög oldalfelező merőlegesei és belső szögfelezői egybeesnek, így a háromszög beírt és köré írt körének középpontja is ugyanaz a pont. Ez a pont a háromszög két csúcsával egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek szárszöge 120°. Ezt a háromszöget az alaphoz tartozó magassága két fél szabályos háromszögre bontja, amelyről tudjuk, hogy a rövidebb befogója fele az átfogónak.



Mivel az átfogó éppen a körülírt kör sugara, a befogó a beírt kör sugara, a feladat állítása igaz.

1405 Az 1404. feladatból következik, hogy az a oldalú szabályos háromszög magassága éppen a beírt és körülírt kör sugarának összege, és hosszuk aránya $1:2$.

Tehát a beírt kör sugara: $\frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$, a körülírt kör sugara: $\frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$.

1406 Ha egy háromszög köré írt körének sugara R, középpontja O, egy oldala a, akkor az O pontnak az a oldaltól vett d távolságát Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk:

$$d = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Mivel egy adott háromszög esetén R állandó, a gyök alatti mennyiség akkor a legkisebb, ha a a legnagyobb.

Tehát bebizonyítottuk, hogy egy háromszög köré írt körének középpontja a legnagyobb oldalhoz van a legközelebb.

1407 A helyesen kitöltött táblázat:

Háromszög kerülete	Háromszög területe	Beírt kör sugara
60 cm	125 cm^2	$\frac{25}{6}$ cm
30 cm	30 cm^2	2 cm
k	$\frac{k \cdot r}{2}$	r

1408 A befogók legyenek $a = 30$ cm, $b = 40$ cm, és a Pitagorasz-tételből az átfogó $c = 50$ cm.

a) A beírt kör sugarára ismert a következő összefüggés:

$$r = \frac{a + b - c}{2} = 10 \text{ cm.}$$

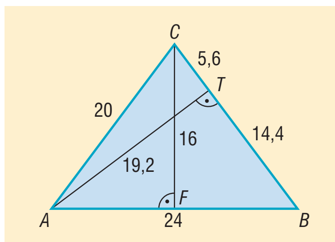
b) Az átfogóhoz írt kör sugara:

$$r_c = \frac{a + b + c}{2} = 60 \text{ cm.}$$

c) A befogókhoz írt körök sugara:

$$r_a = \frac{a - b + c}{2} = 20 \text{ cm} \quad \text{és} \quad r_b = \frac{b - a + c}{2} = 30 \text{ cm.}$$

1409 Az ABC egyenlő szárú háromszögben az ábrának megfelelően AB az alap, F az alap felezőpontja.



a) A CFB háromszögben a Pitagorasz-tételt használva:

$$AB = 2 \cdot FB = 2 \cdot \sqrt{20^2 - 16^2} = 24 \text{ cm.}$$

b) Legyen a szárhoz tartozó magasság m. Az ABC háromszög területére igaz:

$$\frac{24 \cdot 16}{2} = \frac{20 \cdot m}{2}.$$

Innen a szárhoz tartozó magasság 19,2 cm.

c) A BC szárhoz tartozó magasság talppontja legyen T. Az ABT háromszögben Pitagorasz tétele:

$$TB^2 + 19{,}2^2 = 24^2 \quad \Rightarrow \quad TB = 14{,}4 \quad \Rightarrow \quad TC = 20 - 14{,}4 = 5{,}6.$$

A szárhoz tartozó magasság a szárat 14,4 és 5,6 cm-re osztja.

d) Ha a beírt kör sugara r, a háromszög területét kétféleképpen felírhatjuk:

$$\frac{24 \cdot 16}{2} = r \cdot \left(\frac{20 + 20 + 24}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad r = 6 \text{ cm.}$$

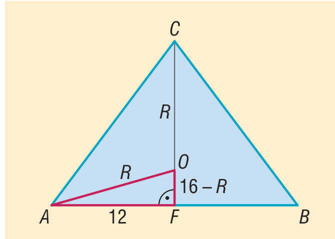
e) Legyen a háromszög köré írható körének sugara R, a kör középpontja O. Az O pont rajta van az alaphoz tartozó magasságon.

Az AFO derékszögű háromszögben $OF = 16 - R$, $AO = R$ és $AF = 12$.

Pitagorasz tétele az AFO háromszögre:

$$R^2 = 12^2 + (16 - R)^2.$$

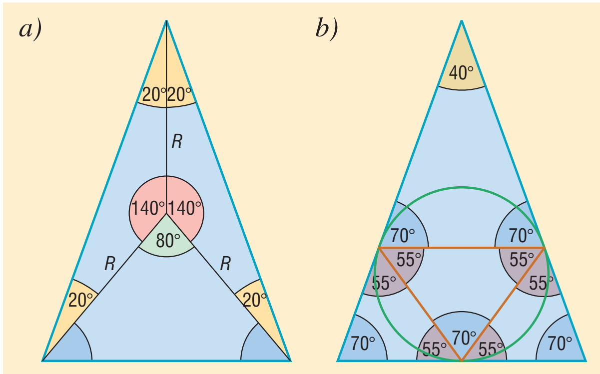
Az egyenletet megoldva: $R = 12{,}5$ cm.



1410 A háromszög egyenlő szárú, mert szögeinek nagysága 70º, 70º és 40º.

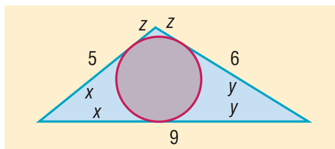
a) A bal oldali ábráról leolvasható, hogy az egyenlő szárú háromszög oldalai 140º, 140º és 80º-os szögben látszanak a körülírható kör középpontjából.

b) Külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlőségéből az egyenlő szárú háromszögekben adódnak a jobb oldali ábrán látható szögek. Annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt körnek az oldalakkal vett érintési pontjai határoznak meg: 70º, 55º és 55º.



1411 Az ábra alapján a háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ y + z = 6 \\ x + z = 5 \end{array}\right\}.$$



Az egyenletrendszer megoldásai: $x = 4$, $y = 5$, $z = 1$.

Tehát az érintési pontok az 5 cm-es oldalt 4 és 1 cm-es szakaszokra, a 6 cm-es oldalt 6 és 1 cm-es szakaszokra, a 9 cm-es oldalt 4 és 5 cm-es szakaszokra osztják.

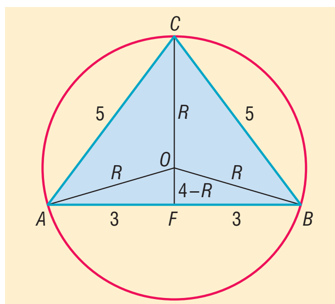
1412 *a)* A háromszöget lefedő legkisebb sugarú kör éppen a háromszög köré írt kör.

Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = AC = 5$ cm.

Ha az alap felezőpontja F, akkor $AF = 3$ cm. Az AFC háromszögben Pitagorasz tétele alapján $CF = 4$ cm.

Legyen az ABC háromszög köré írt körének sugara R, a kör középpontja O. Az O pont rajta van az ABC háromszög alapjához tartozó magasságán.

Az AFO derékszögű háromszögben $OF = 4 - R$, $AO = R$, valamint $AF = 3$. Pitagorasz tétele erre a háromszögre:



$$R^2 = 3^2 + (4 - R)^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{25}{8} = 3{,}125.$$

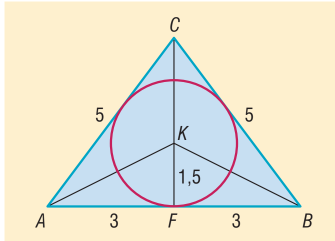
A háromszöget lefedő körlap sugara legalább 3,125 cm.



b) A beírt kör K középpontja az ABC háromszög alaphoz tartozó magasságán van.

Ha a beírt kör sugara r, a háromszög területét kétféleképpen írhatjuk fel:

$$\frac{4\cdot 6}{2}=r\cdot\left(\frac{5+5+6}{2}\right) \Rightarrow r=1{,}5.$$



Így $CK = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$ cm.

Az AKF derékszögű háromszögben $AF = 3$ cm, $KF = r = 1{,}5$ cm.

Az AKF derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AK = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2} \approx 3{,}35 \text{ cm}.$$

Hasonlóan adódik: $BK = 3{,}35$ cm.

A beírt kör középpontja a csúcsoktól 2,5, 3,35 és 3,35 cm-re van.

1413 *a)* A doboz alapélének hosszát annak a szabályos háromszögnek az oldala adja, amelybe 13 cm sugarú kör írható. Az 1405. feladat alapján:

$$13=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a=\frac{78}{\sqrt{3}}\approx 45{,}03 \text{ cm}.$$

A háromszög alapú doboz alapéle 45,03 cm.

b) A doboz alapélének hosszát annak a négyzetnek az oldala adja, amelybe 13 cm sugarú kör írható. A négyzet alapú doboz alapéle $2\cdot 13 = 26$ cm.

c) Az első esetben az alaplap területe:

$$\frac{\left(\frac{78}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{78^2\cdot\sqrt{3}}{12}\approx 878{,}15 \text{ cm},$$

míg a kerülete:

$$3\cdot\frac{78}{\sqrt{3}}\approx 135{,}1 \text{ cm}.$$

A második esetben az alaplap területe:

$$26^2 = 676 \text{ cm}^2,$$

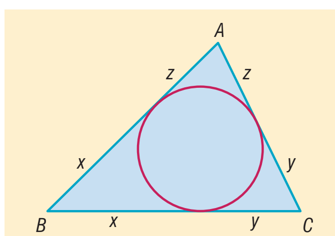
a kerülete pedig:

$$4\cdot 26 = 104 \text{ cm}.$$

Mivel a dobozok magassága egyenlő, a második csomagolási módot érdemes választani.

1414 Az ábra segítségével a háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a\\ y+z&=b\\ x+z&=c \end{aligned}\right\}.$$



Az egyenletrendszer megoldásai (s a háromszög félkerülete):

$$x=\frac{a+c-b}{2}=s-b,\quad y=\frac{a+b-c}{2}=s-c,\quad z=\frac{b+c-a}{2}=s-a.$$

Tehát az érintési pontok az oldalakat a következő hosszúságú szakaszokra osztják:

a oldalt $s-b$ és $s-c$; b oldalt $s-a$ és $s-c$; c oldalt $s-a$ és $s-b$.

1415 Ha a háromszög befogói a, b és az átfogója c, akkor a Pitagorasz-tétel alapján $a^2 + b^2 = c^2$.

Ha a két befogó mindegyike páratlan, akkor az átfogó páros. Ha a két befogó mindegyike páros, akkor az átfogó páros. Ha a két befogó különböző paritású, akkor az átfogó páratlan. Tehát mindegyik esetben $a + b - c$ páros.

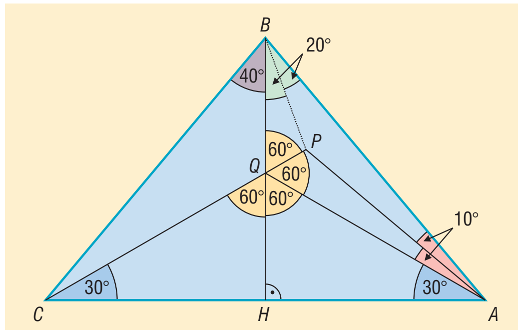
A derékszögű háromszög beírt körének sugarára ismert a következő összefüggés:

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Mivel a tört számlálója páros, r egész.

1416 Az ábrán látható ABC egyenlő szárú háromszögben:

$$BAC\sphericalangle = BCA\sphericalangle = 50^\circ.$$



Rajzoljuk meg az alaphoz tartozó BH magasságot, ennek CP-vel való metszéspontja legyen Q.

Az ACQ egyenlő szárú háromszögben:

$$QAC\sphericalangle = QCA\sphericalangle = 30^\circ \quad \text{és} \quad AQC\sphericalangle = 120^\circ.$$

A QAB háromszögben:

$$BAQ\sphericalangle = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ,$$
$$QBA\sphericalangle = 40^\circ \quad \text{és} \quad BQA\sphericalangle = 120^\circ.$$

Vizsgáljuk meg a QAB háromszögben PQ, illetve PA mekkora részekre osztja a Q-nál, illetve az A-nál lévő szögeket.

Mivel $PAC\sphericalangle = 40^\circ$, $QAP\sphericalangle = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$, a PA egyenese felezi az A-nál lévő szöget. Az ACQ háromszög Q-nál lévő külső szöge $PQA\sphericalangle = 60^\circ$, vagyis PQ egyenese felezi a Q-nál levő szöget.

Megvizsgálva QAB háromszögben, P pont a háromszög két belső szögfelezőjének metszéspontja, amelyen áthalad a harmadik szögfelező is. Tehát:

$$PBQ\sphericalangle = PBA\sphericalangle = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ.$$

A PCB háromszögben tehát ismert két szög:

$$PBC\sphericalangle = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ \quad \text{és} \quad PCB\sphericalangle = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ.$$

Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°, a harmadik BPC szög 100°.

Thalész tétele – megoldások

1417 A háromszög köré írt körének sugara:

a) $4 \cdot \sqrt{10}$ cm; *b)* $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

1418 A szerkesztés Thalész tétele segítségével történhet. Az érintőszakasz hossza 6 cm.

1419 Legyen P egy olyan pont, amelyből r hosszúságú érintő húzható az O középpontú körhöz.

A körön lévő egyik érintési pont, a kör középpontja és P olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, amely befogóinak hossza r, ezért Pitagorasz tétele alapján P pont $r \cdot \sqrt{2}$ távolságra van a kör középpontjától. A P rajta van az O középpontú $r \cdot \sqrt{2}$ sugarú körön.

Ez utóbbi kör minden pontja rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy abból r hosszúságú érintő húzható az O középpontú r sugarú körhöz.

Az adott pontok halmaza tehát O középpontú $r \cdot \sqrt{2}$ sugarú kör.

1420 Egy egyenlő szárú háromszög AB alapjának felezőmerőlegese tartalmazza a háromszög C csúcsát. Ismert, hogy egy tetszőleges háromszög bármely csúcsából kiinduló két oldal egyenese, a beírt kör egy-egy érintője.

Ez alapján a szerkesztés menete:

1. Vegyük fel az egyenlő szárú háromszög AB alapját, és szerkesszük meg a szakasz felező-merőlegesét.
2. Szerkesszük meg azt a kört, amely az alapot az alap felezőpontjában érinti, és sugara a beírt kör sugarával egyenlő.
3. Thalész-kör segítségével az alap A pontján áthaladó, a beírt kört érintő másik egyenest szerkesszük meg.
4. Ez utóbbi érintő és az AB felezőmerőlegesének metszéspontja adja a háromszög C csúcsát.

1421 A deltoid két szemben levő szöge 90°.

1422 Az átfogó két végpontja mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-kör és az egyenes metszéspontja szolgáltatja a háromszög derékszögű csúcsát.

Ha az adott egyenesre nem illeszkedik az átfogó egyik végpontja sem, akkor:

– ha az adott egyenesnek az átfogó felezőpontjától vett távolsága kisebb, mint az átfogó fele, akkor két háromszöget kapunk megoldásként;

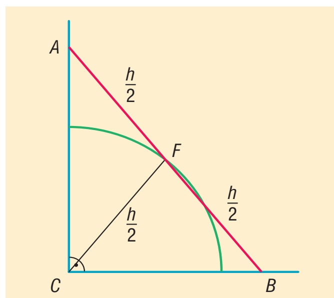
– ha az adott egyenesnek az átfogó felezőpontjától vett távolsága éppen az átfogó fele, akkor egy ilyen háromszöghöz jutunk;

– egyébként a feladatnak nincs megoldása.

Ha az adott egyenes csak az átfogó egyik végpontjára illeszkedik, és nem merőleges a két adott pont által meghatározott egyenesre, akkor egy háromszöget tudunk szerkeszteni, ha merőleges, akkor nincs megoldása a feladatnak.

Ha az adott egyenes az átfogó mindkét végpontját tartalmazza, szintén nincs megoldás.

1423 Legyen a derékszög csúcsa C, a szakasz végpontjai A és B, a szakasz felezőpontja F.

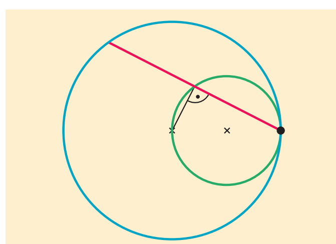


Thalész tételének megfordítása alapján F pont az ABC derékszögű háromszög köré írható körének középpontja. Az FC távolság a kör sugara, ami éppen az adott h hosszúságú szakasz hosszának fele. Tehát F pont rajta van a C középpontú $\frac{h}{2}$ sugarú körön.

A körnek minden olyan pontja, amely a derékszögű szögtartományba esik, előáll valamely h hosszúságú szakasz felezőpontjaként.

Az adott tulajdonságú pontok halmaza a derékszögű szögtartományba eső C középpontú $\frac{h}{2}$ sugarú negyed körív. (Az ív határoló pontjai is hozzá tartoznak a halmazhoz.)

1424 Tudjuk, hogy egy kör tetszőleges húrjának felezőmerőlegese áthalad a kör középpontján. Tehát a húr felezőpontja, a kör középpontja és a húr egyik végpontja derékszögű háromszöget határoznak meg.



A kör adott pontján áthaladó húrok felezőpontjai Thalész tételének megfordítása alapján rajta vannak az adott pont és a kör középpontja fölé mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-körön. A Thalész-kör minden, az adott ponttól különböző pontja előáll valamely húr felezőpontjaként.



1425 Thalész tételének megfordítása alapján a talppontok rajta vannak a PC szakasz mint átmérő fölé írt Thalész-körön.

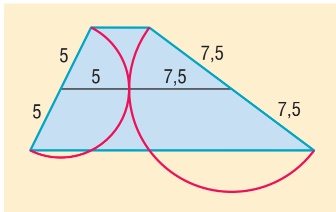
A talppontok, valamint P és C pontok egy körön helyezkednek el.

1426 Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű. A derékszögű háromszög köré írt körének sugara az átfogó hosszának a fele, tehát 6,5 cm.

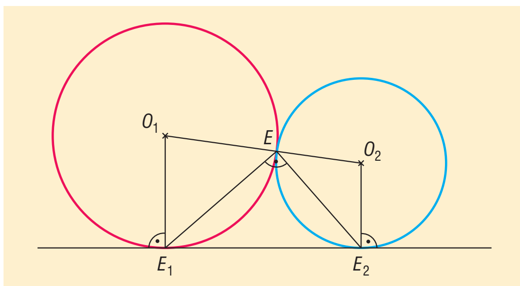
1427 Adott átfogójú derékszögű háromszög derékszögű csúcsa rajta van az átfogó mint átmérő fölé írt Thalész-körön.

Egy háromszögnek a területét számolhatjuk az $\frac{a \cdot m_a}{2}$ képlettel. Mivel az átfogó adott, annak a háromszögnek a legnagyobb a területe, amelyiknek az átfogóhoz tartozó magassága a legnagyobb, vagyis amelyiknek a derékszögű csúcsa legtávolabb van az átfogótól. Ez akkor teljesül, amikor a derékszögű csúcs rajta van az átfogó felezőmerőlegesén, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

1428 A két Thalész-kör sugara egy-egy szár hosszának a fele: 5 és 7,5 cm. A két Thalész-kör kívülről érinti egymást, tehát középpontjaikat összekötő szakasz hossza, ami a szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza is, éppen a két kör sugarának összege. A szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza tehát 12,5 cm.



1429 Az egyik kör középpontja legyen O_1, a másik kör középpontja O_2, és az egyenessel vett érintési pontjaik rendre E_1 és E_2. A két kör az E pontban érintse egymást.



Az $O_1E_1E_2O_2$ négyszög derékszögű trapéz, amelynek az O_1O_2 szárán E egy olyan pont, amelyre igaz, hogy

$$O_1E = O_1E_1, \quad \text{illetve} \quad O_2E = O_2E_2.$$

Az O_1EE_1 egyenlő szárú háromszögben az

$$O_1EE_1\sphericalangle = \frac{180° - E_1O_1E\sphericalangle}{2}.$$

Az O_2EE_2 egyenlő szárú háromszögben az

$$O_2EE_2\sphericalangle = \frac{180° - E_2O_2E\sphericalangle}{2}.$$

Mivel egy trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180°, ez utóbbi két szög összege:

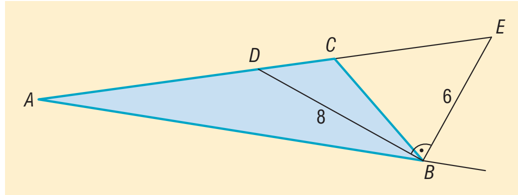
$$\frac{180° - E_2O_2E\sphericalangle}{2} + \frac{180° - E_1O_1E\sphericalangle}{2} = 180° - \frac{E_2O_2E\sphericalangle + E_1O_1E\sphericalangle}{2} = 90°.$$

Ez azt jelenti, hogy az E_2EE_1 háromszög derékszögű háromszög. Thalész tételének megfordítása alapján az E_2E_1 átfogó felezőpontja a derékszögű csúcstól fele olyan távolságra van, mint E_2E_1 hossza.

Az érintési pontok által meghatározott E_1E_2 szakasz felezőpontjának az E ponttól vett távolsága tehát 10 cm.



1430 *a)* $DBE\sphericalangle = 90°$, mivel egy szögnek és a mellékszögének felezői egymásra merőlegesek.



A BDE háromszögben Pitagorasz tétele alapján a DE átfogó 10 cm.

Thalész tételének megfordítása alapján a BDE háromszög köré írt körének sugara az átfogó fele: 5 cm.

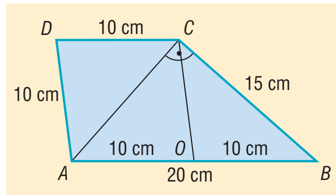
b) A háromszög területét kétféleképpen számolva:

$$\frac{6\cdot 8}{2} = \frac{(6+8+10)\cdot r}{2}.$$

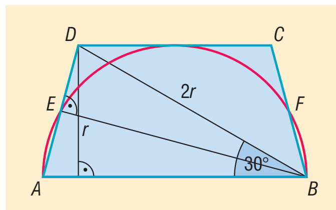
Ebből a beírt kör sugara 2 cm.

1431 Az $ABCD$ trapéz AB alapjának felezőpontja legyen O. Az $AOCD$ négyszög 10 cm oldalhosszúságú rombusz. Az O pontnak A-tól, B-től és C-től vett távolsága egyaránt 10 cm. Thalész tétele értelmében az ABC háromszög derékszögű, és C csúcsnál van a derékszög. Pitagorasz tételét felírva:

$$AC = \sqrt{20^2 - 15^2} = \sqrt{175} \approx 13{,}23 \text{ cm}.$$



1432 A trapéz BC és AD szárainak felezőpontjai legyenek rendre F és E, valamint az AB alap fölé mint átmérő fölé írt kör sugara r.



Thalész tétele alapján AEB szög 90°, és mivel E felezéspont, az ABD háromszög egyenlő szárú: $AB = BD = 2r$.

A trapéz DC alapját érinti a félkör, tehát a trapéz magassága r.

A trapéz r magassága a $2r$ hosszú BD átlóval egy fél szabályos háromszöget határoz meg. Ennek a háromszögnek a kisebbik hegyesszöge $DBA\sphericalangle = 30°$.

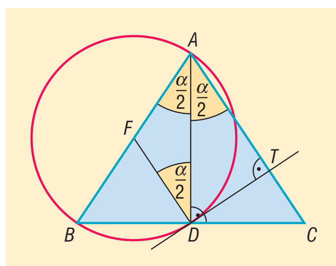
Az ABD egyenlő szárú háromszögből:

$$BAD\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

Hasonlóan az $ABC\sphericalangle = 75°$.

A trapéz szögei: 75°, 105°, 105°, 75°.

1433 Az ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge α, D-ből AC-re állított merőleges talppontja legyen T.



A háromszög egyenlő szárú, tehát $DAB\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

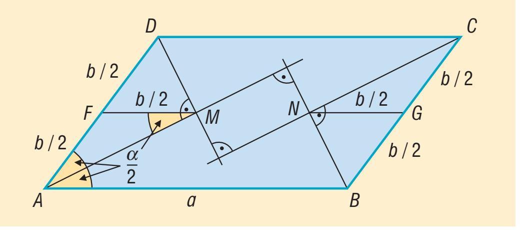
Az ABD háromszög derékszögű, így körülírható köre az AB mint átmérő fölé írt Thalész kör. A kör középpontja az AB átmérő F felezőpontja, és az FA, illetve az FD szakaszok a kör sugarával egyenlő hosszúságúak. Ez alapján FAD háromszög egyenlő szárú, tehát $FAD\sphericalangle = FDA\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

Tehát a DAC és az FDA szögek egyenlők, vagyis FD párhuzamos AC-vel.

Mivel DT merőleges AC-re, merőleges a vele párhuzamos FD-re is.

Az ABD háromszög körülírható körének sugara FD, és láttuk, hogy merőleges DT egyenesére, tehát a DT egyenes érinti az ABD háromszög körülírható körét.

1434 Mivel a paralelogramma oldalai nem egyenlő hosszúak, két-két szögfelező metszéspontja különböző, tehát a belső szögfelezők metszéspontjai négyszöget határoznak meg.



Két szomszédos belső szög szögfelezői olyan szögeket feleznek, amelyeknek összege 180º, tehát ezek derékszögben metszik egymást, vagyis a négy metszéspont olyan négyszöget határoz meg, amelynek szögei 90º-osak, tehát téglalap.

Legyen $AD = b$ és az AD oldal felezéspontja F, valamint az A és a D csúcsnál lévő belső szögfelezők metszéspontja M.

Az előbbiek alapján az AMD háromszög derékszögű. Thalész tételének megfordításából következik, hogy $FM = FA = \frac{AD}{2} = \frac{b}{2}$. Az AFM háromszög egyenlő szárú, tehát az $FAM\sphericalangle = AMF\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Az AMF és az MAB szögek egyenlők, vagyis FM párhuzamos AB-vel.

Ugyanígy belátható a B, illetve a C csúcsnál lévő belső szögfelezőknek N metszéspontjára, hogy az N pont a BD oldal G felezéspontjától $\frac{b}{2}$ távolságra van, és hogy GN párhuzamos AB-vel.

Ha a paralelogramma hosszabbik oldala a, akkor $FG = a$ és FG párhuzamos a paralelogramma a hosszúságú oldalával.

Tehát az M és az N pontok FG szakaszra esnek, valamint

$$MN = FG - FM - GN = a - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = a - b.$$

Tehát a téglalap átlója $a - b$ hosszúságú.

Érintőnégyszög, érintősokszög – megoldások

1435 A rombusz érintőnégyszög, beírható körének középpontja az átlók metszéspontja. Ebből közvetlenül adódik az állítás.

1436 A rombusz oldala $24 \cdot \sqrt{2}$ cm.

1437 A rombusz szemben lévő oldalai párhuzamosak, tehát a szemben lévő érintési pontokat összekötő szakasz felezőpontja a beírt kör középpontja.

A rombusz magassága mindkét párhuzamos oldalpár esetén ugyanolyan hosszú, tehát a szemben lévő érintési pontokat összekötő szakaszok egyenlő hosszúak.

Tehát a beírt kör érintési pontjai által meghatározott négyszög átlói egyenlők és felezik egymást, vagyis téglalap.

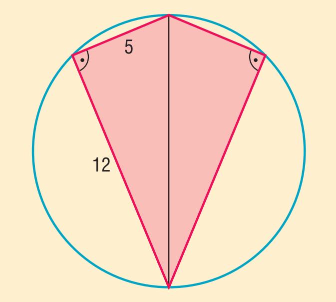
A beírt kör érintési pontjai által meghatározott négyszög átlói ugyanakkora szöget zárnak be, mint a rombusz hegyesszöge, tehát 60º-ot.

1438 Kössük össze az a, b, c, d oldalú érintőnégyszög csúcsait a beírt kör középpontjával. Az így kapott háromszögek mindegyikének magassága a beírt kör sugara. A négy háromszög területének összegeként írjuk fel a négyszög területét:

$$t_{\text{négyszög}} = \frac{a}{2} \cdot r + \frac{b}{2} \cdot r + \frac{c}{2} \cdot r + \frac{d}{2} \cdot r = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r = \frac{k}{2} \cdot r.$$



1439 Mivel a deltoid köré kör írható, ennek a körnek a középpontja rajta van a szimmetriaátlón. Thalész tételének alapján a deltoid két szomszédos, különböző hosszúságú oldala merőleges egymásra.



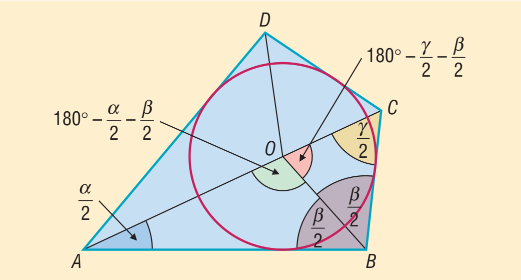
Legyen a beírható kör sugara r. A deltoid területét kétféleképpen számolva:

$$\frac{12\cdot 5}{2}\cdot 2 = r\cdot\frac{2\cdot 12 + 2\cdot 5}{2} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{60}{17} \approx 3{,}53 \text{ cm.}$$

A beírható kör sugara 3,53 cm.

1440 *a)* Vegyük fel a két szomszédos oldal által közbezárt szöget, és szerkesszük meg a szög szárait érintő, a beírt kör sugarával egyenlő sugarú kört.

A szög száraira mérjük fel a két adott oldal hosszúságát, majd a végpontokból szerkesszünk a körhöz érintőket. Az adott szög száraitól különböző érintők metszéspontja adja a négyszög negyedik csúcsát.



b) Az $ABCD$ érintőnégyszög szögfelezőinek metszéspontja O pont. Az A, B és C csúcsoknál lévő szögek rendre α, β és γ. Az AOB és BOC szögek nagysága:

$$AOB\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \quad \text{illetve} \quad BOC\sphericalangle = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Ez alapján, ha adott α, β és γ, valamint a beírt kör sugara, a szerkesztést így hajthatjuk végre:

1. Vegyük fel a B csúcsú β szöget, és szerkesszük meg a szög szárait érintő, a beírt kör sugarával egyenlő sugarú kört.
2. A kör O középpontjában mérjük fel OB félegyenesre $180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ szöget, így az A csúcsot kapjuk.
3. A kör O középpontjában mérjük fel OB félegyenesre a másik oldalra $180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ szöget, így a C csúcsot kapjuk.
4. A negyedik csúcsot az A és a C pontokból a körhöz húzott érintők szerkesztésével kapjuk.

1441 A negyedik oldal lehet 6 cm, 18 cm vagy 22 cm.

1442 Mivel kör írható a hatszögbe:

$$AB + CD + EF = BC + ED + FA.$$

Behelyettesítve:

$$6 + 8 + 10 = 8 + 7 + FA \quad\Rightarrow\quad FA = 9 \text{ cm.}$$

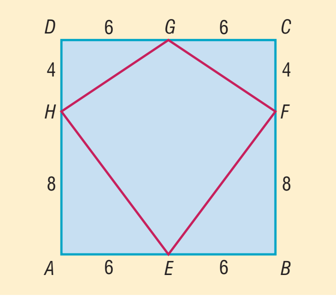
1443 *a)* Mivel $HG = FG$ és $HE = FE$, a négyszög deltoid.

b) A deltoid területét kétféleképpen számolhatjuk. Egyrészt a négyzet területének a fele: $T = 72$ cm^2.

Másrészt, mivel a deltoid érintőnégyszög, a beírt kör r sugarával számolva, a terület:

$$T = r\cdot\frac{k}{2} = r\cdot\frac{2\cdot(HG + HE)}{2} =$$

$$= r\cdot\left(\sqrt{6^2 + 4^2} + \sqrt{6^2 + 8^2}\right) = r\cdot\left(\sqrt{52} + 10\right).$$

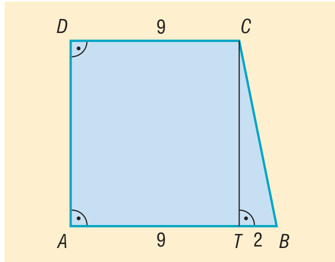


A két érték megegyezik, ezért:

$$r \cdot \left(\sqrt{52}+10\right)=72 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{72}{\sqrt{52}+10}\approx 4{,}18 \text{ cm}.$$

A négyszög beírt körének sugara 4,18 cm.

1444 Használjuk az ábra jelöléseit. Az $ABCD$ derékszögű trapéz derékszögű szára AD, alapjai pedig $AB = 11$ cm és $CD = 9$ cm. Az érintőnégyszögek tétele alapján:



$$AD + BC = 9 + 11 = 20 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad BC = 20 - AD.$$

A CTB háromszög egyik befogója CT, a másik befogója pedig $TB = 11 - 9 = 2$ cm. Mivel $AD = CT$, a BC átfogó $20 - CT$. A háromszögben felírva Pitagorasz tételét:

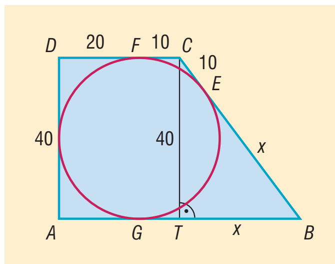
$$CT^2 + TB^2 = CB^2.$$

Behelyettesítve és rendezve az egyenletet:

$$CT^2 + 2^2 = (20 - CT)^2 \quad \Rightarrow \quad CT = \frac{396}{40} = 9{,}9 \text{ cm}.$$

A trapéz magassága 9,9 cm.

1445 A derékszögű szár 40 cm, a másik szár ennél nagyobb, így csak a rövidebbik alap lehet 30 cm. Az ábra jelöléseit használva, a C pontból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségéből:



$$CE = CF = 30 - 20 = 10 \text{ cm}.$$

Legyen a B pontból húzott érintőszakasz hossza x. $BE = BG = x$.

A TCB háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$(10 + x)^2 = 40^2 + (x - 10)^2.$$

Az egyenletet rendezve $x = 40$.

A trapéz alapjainak hossza tehát 30 cm és 60 cm, magassága 40 cm.

A trapéz területe:

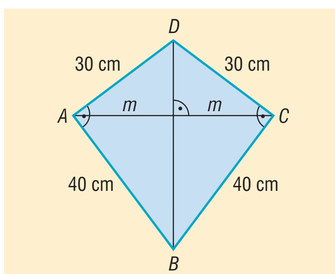
$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(30+60)\cdot 40}{2} = 1800 \text{ cm}^2.$$

A beírt kör sugara $\frac{40}{2}$ cm, területe:

$$T_{\text{kör}} = 20^2 \cdot \pi = 400\pi \text{ cm}^2.$$

Tehát a trapéz területének $\frac{1800-400\pi}{1800}\cdot 100 = 30{,}19\%$ -a esik a körön kívül.

1446 Mivel a négyszögnek két-két oldala egyenlő, de két szemben lévő szöge nem egyenlő, a négyszög deltoid.



Egy négyszög belső szögeinek összege 360°. A deltoid két szemben levő, nem egyenlő szögének az összege 180°, tehát a két egyenlő nagyságú szöge 90°.

A deltoid két olyan derékszögű háromszögből áll, amelynek befogói 30 és 40 cm hosszúak.

Tekintsük az ábra jelöléseit.



a) A hurkapálcák hosszának meghatározásához szükségünk van a BCD derékszögű háromszög átfogójának, illetve az átfogóhoz tartozó m magasságának a hosszára.

A Pitagorasz-tételből az átfogó hossza 50 cm, ami a deltoid egyik átlójának a hossza.

A derékszögű háromszög területét kétféleképpen számíthatjuk:

$$\frac{30 \cdot 40}{2} = \frac{50 \cdot m}{2} \quad \Rightarrow \quad m = 24.$$

Mivel a deltoid átlói merőlegesek egymásra, a másik átló hossza $2m = 48$ cm.

A merevítéshez egy 50 cm és egy 48 cm hosszú hurkapálcára van szükségünk.

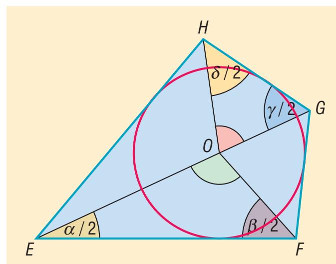
b) A deltoid területe a két derékszögű háromszög területének az összegeként számítható:

$$2 \cdot \frac{30 \cdot 40}{2} = 1200 \text{ cm}^2.$$

A sárkány elkészítéséhez felhasznált papírmennyiség:

$$\frac{1200}{80} \cdot 100 = 1500 \text{ cm}^2 = 15 \text{ dm}^2.$$

c) A deltoid belső szögfelezőinek metszéspontja lesz a kör középpontja, sugara ennek a pontnak valamely oldaltól vett távolsága.



d) Az AOB és a COD szögek nagyságának összege 180º.

e) Az $EFGH$ érintőnégyszög E, F, G és H csúcsnál levő szögei legyenek rendre α, β, γ és δ. Mivel a beírt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja, ezért:

$$EOF\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{és} \quad GOH\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\gamma+\delta}{2}.$$

Az $EFGH$ négyszög belső szögeinek összege 360º, tehát:

$$EOF\sphericalangle + GOH\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} + 180^\circ - \frac{\gamma+\delta}{2} = 360^\circ - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 180^\circ.$$

Az $ABCD$ érintőnégyszögben az AOB és a COD szögek nagyságának összege 180º.

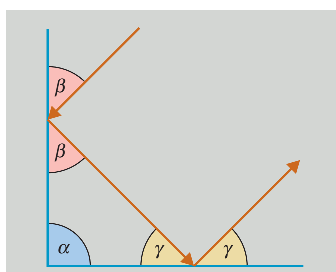
Vegyes feladatok – megoldások

1447 Két 60º-os és két 120º-os szöge van a trapéznak.

1448 A harmadik csúcshoz tartozó magasság és szögfelező 11º-os szöget zár be egymással.

1449 A háromszög harmadik csúcsánál lévő belső szöge 84º.

1450 Az ábra jelöléseit használva, tegyük fel, hogy a beeső fénysugár β szöget zár be az első tükörrel, és a visszaverődő fénysugár γ szöget zár be a második tükörrel.



Ha ez a két fénysugár párhuzamos, akkor $180^\circ - 2\beta$ és $180^\circ - 2\gamma$ 180º-ra egészítik ki egymást:

$$180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta + \gamma = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ.$$

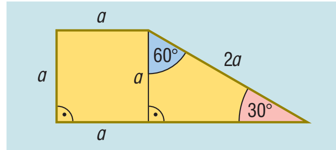
A két síktükör merőleges egymásra.



1451 A derékszögű trapéz felbontható egy a oldalú négyzetre és egy $2a$ oldalú fél szabályos háromszögre.

a) A trapéz negyedik oldala $a + a \cdot \sqrt{3}$.

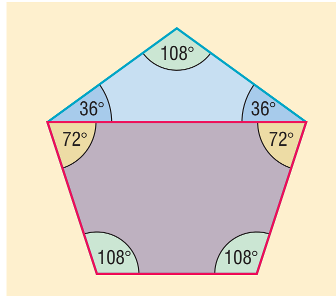
b) A trapéz szögei: 90º, 90º, 150º és 30º.



1452 A négyszög két szöge egyenlő a szabályos ötszög egy belső szögével, azaz 108º-osak. A fennmaradó két szög nagyságát megkapjuk úgy, hogy 108º-ból kivonjuk annak az egyenlő szárú háromszögnek az alapon fekvő szögét, amelynek szárszöge 108º. (➡)

A másik két szög nagysága:

$$108° - 36° = 72°.$$

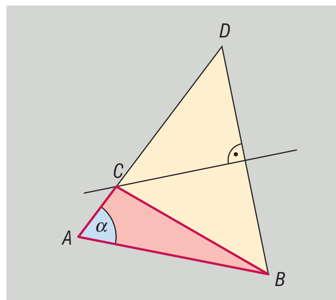


1453 A háromszög harmadik csúcsa egyenlő távol van az alap két végpontjától, így az alap felezőmerőlegesének és a szárnak a metszéspontja szolgáltatja a háromszög harmadik csúcsát.

A szerkesztés akkor végezhető el, ha a szár egyenese áthalad a megadott pontok valamelyikén, illetve nem merőleges az alap egyenesére.

1454 Induljunk ki a kész ábrából. Mérjük fel az ABC háromszög BC oldalának hosszát CA oldal egyenesére C-n túl. Így D ponthoz jutunk. Mivel BCD háromszög egyenlő szárú, a C csúcs rajta van DB szakasz felezőmerőlegesén.

Ez alapján a szerkesztés az ABD háromszög szerkesztésével kezdődik. (Ez végrehajtható, mivel adott két oldalának hossza, valamint a közbezárt szög nagysága.) A háromszög C csúcsát a BD szakasz felezőmerőlegesének és az AD szakasznak a közös pontja szolgáltatja.



1455 *a)* Két szemközti csúcsának távolsága a köré írt kör sugarának kétszerese, azaz 36 cm.

b) Két szemközti oldalának távolsága egy 18 cm oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese:

$$2 \cdot \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{2} = 18 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

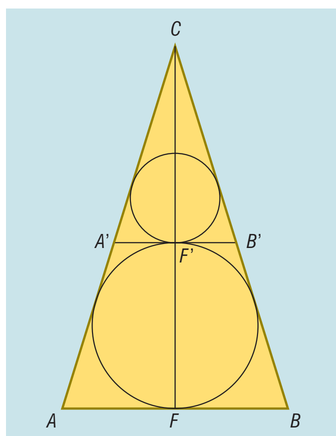
1456 Induljunk ki a kész ábrából. Az F és F' pontok az ABC egyenlő szárú háromszög beírt körének és a háromszög alaphoz tartozó magasságának metszéspontjai.

A háromszög beírt körét a szerkesztendő kör az F' pontban érinti.

Ez alapján a szerkesztés lépései a következők:

1. Szerkesszük meg az adott ABC háromszög beírt körét.
2. A beírt körhöz F' pontban szerkesszünk érintőt, ennek a szárakkal való metszéspontjai legyenek A' és B'.
3. Az $A'B'C$ háromszög beírt körét szerkesszük meg.

A szerkesztés mindig végrehajtható.



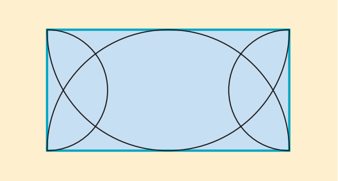


1457 A kör középpontja a szakasztól 5 cm távolságra van.

1458 A C végpontú átmérők másik végpontjait összekötő szakasz áthalad a két kör másik metszéspontján, tehát A és B nem különböző pontok.

1459 A téglalap oldalai fölé rajzolt Thalész-köröknek a téglalap csúcsaitól különböző metszéspontjait kell összeszámlálnunk.

Hat olyan pont van a téglalap belsejében, amelyből valamelyik két oldal derékszög alatt látszik.



1460 A paralelogrammák közül érintőnégyszög csak a rombusz lehet. A rombusz magassága a beírt körének az átmérője, 20 cm.

Mivel a rombusz egyik szöge 45°, az oldala $20 \cdot \sqrt{2}$ cm hosszú.

A rombusz kerülete $80 \cdot \sqrt{2} \approx 113{,}14$ cm.

A rombusz területe $20 \cdot 20 \cdot \sqrt{2} = 400 \cdot \sqrt{2} \approx 565{,}69\ \text{cm}^2$.

1461 Legyen a két hiányzó oldal hossza a és $a + 4$. Az érintőnégyszögek tétel szerint:

$$10 + 12 = a + a + 4 \quad \Rightarrow \quad a = 9.$$

A négyszög két hiányzó oldalának hossza 9 és 13 cm hosszú.

1462 Ha n oldalú a sokszög, akkor

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 20 \quad \Rightarrow \quad n \cdot (n-3) = 40.$$

Figyelembe véve, hogy n pozitív egész és nagyobb, mint $n - 3$, 40 lehetséges szorzatalakjai:

$$40 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5.$$

Mivel a két tényező különbségének 3-nak kell lennie, a $8 \cdot 5$ a megfelelő szorzatalak.

A szabályos sokszög 8 oldalú és egy belső szöge 135°.

1463 Ha a kép szélessége $16x$, magassága $9x$, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$(16x)^2 + (9x)^2 = 81^2 \quad \Rightarrow \quad x \approx 4{,}41.$$

A televízió méretei megközelítőleg:

szélesség: $16 \cdot 4{,}41 + 2 \cdot 10 = 90{,}56$ cm, magasság: $9 \cdot 4{,}41 + 10 + 18 = 67{,}69$ cm.

Nem fér be a készülék a szekrényünkbe, mivel a magassága 65 cm-nél nagyobb.

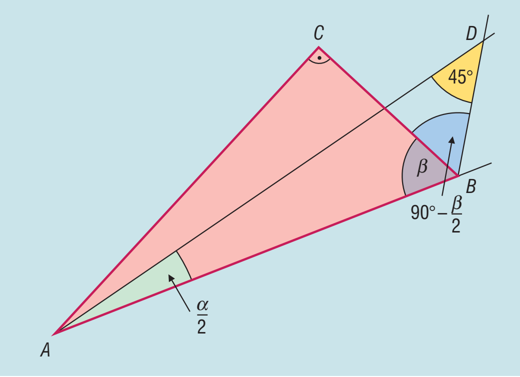
1464 Messe az A csúcsból kiinduló belső szögfelező a B csúcsból kiinduló külső szögfelezőt egy D pontban.

Az ABD háromszög belső szögeinek összege:

$$\frac{\alpha}{2} + \left(\beta + 90° - \frac{\beta}{2}\right) + 45° = 180°,$$

amiből $\alpha + \beta = 90°$.

Tehát az ABC háromszög C csúcsánál lévő belső szöge 90°. Thalész tételének megfordítása alapján a háromszög köré írt körének sugara az AB átfogó hosszának a fele, vagyis 10 cm.



1465 A váza távolságát a terítő széleitől a rombusz beírható körének r sugara adja meg, amelyet a következő összefüggés segítségével határozhatunk meg:

$$t_{\text{rombusz}} = r \cdot \frac{k_{\text{rombusz}}}{2}.$$

A rombusz oldalának hosszát Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$a = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad k_{\text{rombusz}} = 200 \text{ cm}.$$

A rombusz területét az átlók szorzatának fele adja meg:

$$t_{\text{rombusz}} = \frac{60 \cdot 80}{2} = 2400 \text{ cm}^2,$$

$$2400 = r \cdot \frac{200}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 24.$$

A váza a terítő széleitől 24 cm távolságra van.

1466 Számoljuk össze a háromszögeket aszerint, hogy oldalai a szabályos nyolcszög oldalai közül hány oldalt fognak közre.

Ezek szerint a közrefogott oldalak száma lehet:

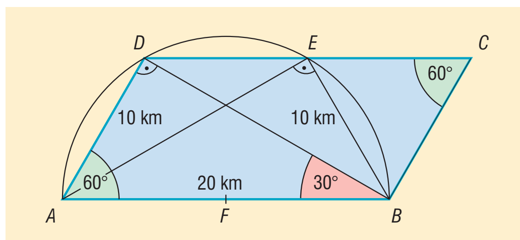
1, 1 és 6; 1, 2 és 5; 1, 3 és 4; 2, 2 és 4; 2, 3 és 3.

Tehát 5 különböző háromszöget alkothatnak a szabályos nyolcszög csúcsai.

Egy háromszög akkor derékszögű, ha egyik oldala a köré írt körének az átmérője. Mivel a szabályos nyolcszög köré írható kör, azok a háromszögek lesznek derékszögűek, amelyeknek egyik oldala a nyolcszög négy oldalát fogja közre.

E szerint két derékszögű háromszög van.

1467 Legyen az $ABCD$ paralelogramma két hosszabbik oldala AB és CD, valamint BAC szög 60°.



Keressük a paralelogramma kerületén azokat a pontokat, amelyekből az AB oldal 90°-os szög alatt látszik.

Az ABD háromszögben az A csúcsánál levő szöge 60° és $AB = 2 \cdot AD \Rightarrow$ fél szabályos háromszög $\Rightarrow$ D-nél derékszög van $\Rightarrow$ D csúcs rajta van AB Thalész körén.

Legyen a DC oldal felezéspontja E.

A BCE háromszög szabályos háromszög ($BC = CE$ és a BCE szög 60°).

Az AEB háromszög is egy fél szabályos háromszög, mivel a B csúcsánál levő szöge $120° - 60° = 60°$ és $AB = 2 \cdot EB \Rightarrow E$ csúcs is rajta van AB Thalész körén.

Mivel egy egyenesnek és egy körnek legfeljebb két metszéspontja lehet, a paralelogramma kerületén csak az E és D pontokból látszik az AB oldal 90°-os szögben.

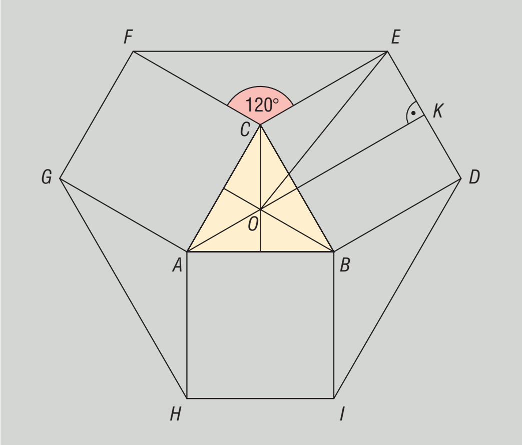
Hasonlóan adódik, hogy DC oldal az AB oldal B végpontjából és F felezéspontjából látszik derékszög alatt.

A kincs a paralelogramma kerületén négy helyen lehet: a két tompaszögű csúcsban, vagy a hosszabbik oldalak felezéspontjaiban.



1468 Legyen az ABC szabályos háromszög beírható körének középpontja O. Ismert, hogy a szabályos háromszög beírt köre sugarának hossza:

$$\frac{a \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{6} = 4 \cdot \sqrt{3}.$$



Az ábra jelöléseit használva ED oldal K felezéspontjának O-tól vett távolsága $24 + 4 \cdot \sqrt{3}$.

A KOE derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$OE^2 = \left(24 + 4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 12^2 = 768 + 192 \cdot \sqrt{3},$$

amiből

$$OE = \sqrt{768 + 192 \cdot \sqrt{3}} \approx 33{,}17 \text{ cm}.$$

Hasonlóan számítható:

$$OD = OF = OG = OH = OI \approx 33{,}17 \text{ cm}.$$

a) Mivel a hatszög csúcsainak O ponttól vett távolsága ugyanakkora, ezért a hatszög köré írható kör.

b) A hatszög köré írható kör sugara megközelítőleg 33,17 cm.

c) A hatszög oldalai közül $DE = FG = HI = 24$ cm hosszú.

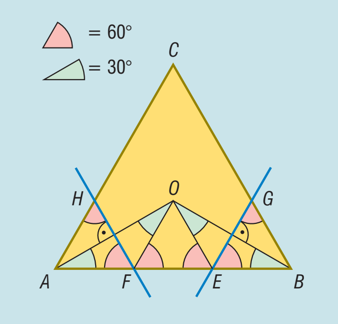
A hatszög FE oldala egy olyan egyenlő szárú háromszögnek az alapja, amelynek a szárszöge 120º, és a szárai 24 cm hosszúak. Tehát az FE oldal egy 24 cm oldalú szabályos háromszög magasságának a kétszerese, vagyis

$$\frac{24 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 24 \cdot \sqrt{3} \approx 41{,}57 \text{ cm}.$$

A hatszög EF, GH és ID oldalainak hossza:

$$24 \cdot \sqrt{3} \approx 41{,}57 \text{ cm}.$$

1469 Az OA, illetve OB szakaszok felezőmerőlegesei az AB oldalt F és E, a BC oldalt G, az AC oldalt H pontban metszik. Az ábrán látható szabályos, illetve egyenlő szárú háromszögeket figyelembe véve AF, FO, FE, OE, EB, AH és BG szakaszok hossza egyaránt 6 cm.



a) Az F és E pontok három 6 cm-es részre, a H és G pontok egy 6 és egy 12 cm-es részre osztják a háromszög oldalait.

b) Az AFH és BGE háromszögek területe egyenlő:

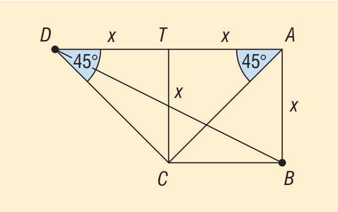
$$\frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9 \cdot \sqrt{3} \approx 15{,}59 \text{ cm}^2.$$

Az $EGCHF$ ötszög területe:

$$\frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot 9 \cdot \sqrt{3} = 81 \cdot \sqrt{3} - 18 \cdot \sqrt{3} = 63 \cdot \sqrt{3} \approx 109{,}12 \text{ cm}^2.$$



1470 A hajó induljon az A pontból, a világítótornyok helyzetét jelezze B és D pont, a hajó két óra múlva legyen a C pontban. A feladat szövege szerint $DB = 50$ km.



Az ACD háromszögben két 45°-os szög van, és $CT = DT = TA = x$.

DBA háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$x^2 + 4x^2 = 50^2 \quad \Rightarrow \quad x = 10 \cdot \sqrt{5} \approx 22{,}36 \text{ km}.$$

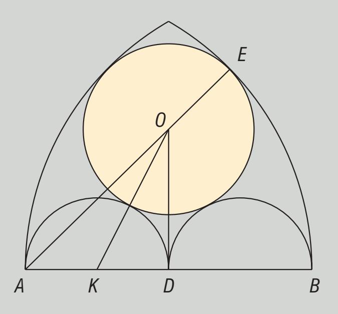
A CTA háromszögből:

$$CA = 10 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{10} \approx 31{,}62 \text{ km}.$$

A hajó átlagsebessége:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{10}}{2} = 5 \cdot \sqrt{10} \approx 15{,}81 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

1471 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen a keresett kör sugarának hossza r, a középpontja O.



Ez a kör belülről érinti az A középpontú 80 cm sugarú kört, ezért

$$AO = 80 - r.$$

A kérdéses kör kívülről érinti a K középpontú 20 cm sugarú félkört, ezért

$$KO = 20 + r.$$

Az AOD derékszögű háromszögben:

$$OD^2 = AO^2 - AD^2 = (80 - r)^2 - 40^2 = 4800 - 160r + r^2.$$

A KOD derékszögű háromszögben:

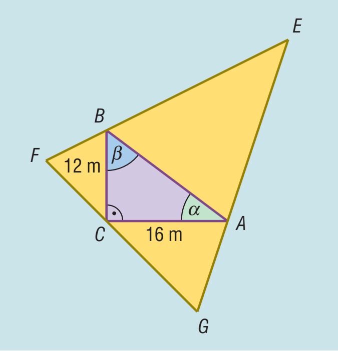
$$OD^2 = KO^2 - KD^2 = (20 + r)^2 - 20^2 = 40r + r^2.$$

Ezek alapján a keresett kör sugara a következő egyenletből számolható:

$$4800 - 160r + r^2 = 40r + r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 24.$$

A keresett kör sugara 24 cm.

1472 Az ábrán látható jelöléseket használva legyen a telek az EFG háromszög, a rá épített ház az ABC háromszög.



A feladat feltételei szerint az $FEG\sphericalangle = 45°$, illetve $BC = 12$ m és $AC = 16$ m.

Az ABC háromszög A és B csúcsánál lévő külső szögek nagysága $180° - \alpha$, illetve $180° - \beta$. Ezen külső szögek szögfelezői által bezárt szög:

$$180° - \frac{(180° - \alpha)}{2} - \frac{(180° - \beta)}{2} =$$

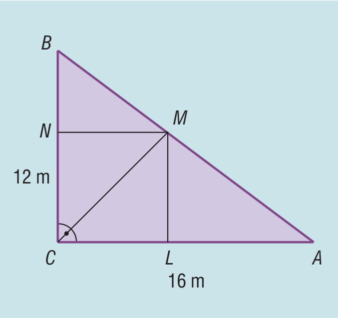
$$= \frac{\alpha + \beta}{2} = 45° \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90°.$$

Tehát az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van.

a) A háznak a telek 45°-os szögével szemközti oldala a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ m}.$$

b) Ha a négyszög alakú szobának minden fala a ház 12 vagy 16 méteres oldalával párhuzamos, és minden oldala egyenlő hosszú, akkor annak az $LMNC$ négyzetnek a területét kell meghatároznunk, amelynek N és L csúcsa az ABC háromszög befogóira, M csúcs pedig az átfogóra illeszkedik.



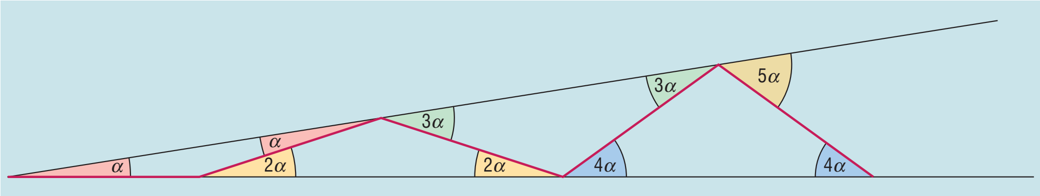
Legyen a négyzet oldalának hossza a. Az ABC derékszögű háromszög területe előáll a BCM és ACM háromszögek területének összegeként:

$$\frac{12 \cdot 16}{2} = \frac{12a}{2} + \frac{16a}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{48}{7}.$$

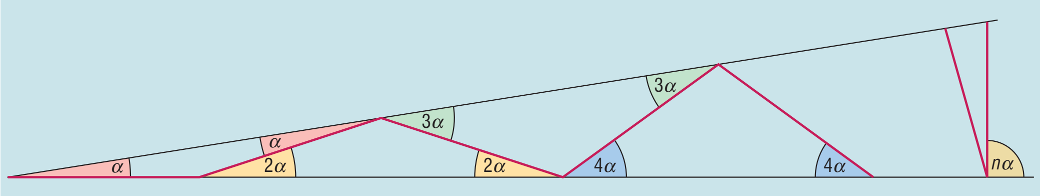
Legfeljebb $\left(\frac{48}{7}\right)^2 \approx 47 \text{ m}^2$ lehet annak a négyszög alakú szobának az alapterülete, amelynek minden fala a ház 12 vagy 16 méteres oldalával párhuzamos.

1473 *a)* A β szög nagysága 36º.

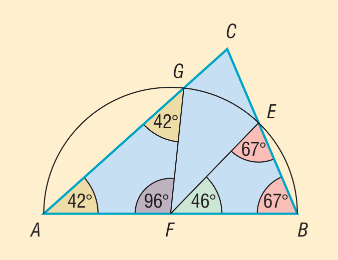
b) Az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei számíthatók: $\alpha, 2 \cdot \alpha, 3 \cdot \alpha, \ldots$ A kilencedik szakaszt még meg kell tudnunk rajzolni, így $9 \cdot \alpha$ legfeljebb 90º lehet. Tehát az α szög nagysága legfeljebb 10º.



c) Az előzőek alapján az n-edik szakasz után már nem tudunk újabb szakaszt berajzolni, ha az ábrán jelölt szög 90º-nál nagyobb. Tehát α szög nagysága legfeljebb $\frac{90^\circ}{n}$.



1474 A derékszögű ABE és ABG háromszögek E és G csúcsai Thalész tételének megfordítása alapján rajta vannak az AB mint átmérő fölé írt körön.



Az FA, FG, FE és FB szakaszok a Thalész-kör sugarai, tehát egyenlő hosszúak.

Az AFG egyenlő szárú háromszög alapon levő szögei 42º-osak, tehát az $AFG\measuredangle = 180^\circ - 2 \cdot 42^\circ = 96^\circ$.

Az EBF egyenlő szárú háromszög alapon levő szögei 67º-osak, tehát az $EFB\measuredangle = 180^\circ - 2 \cdot 67^\circ = 46^\circ$.

Ezek alapján az EFG egyenlő szárú háromszög szárszöge $180^\circ - 46^\circ - 96^\circ = 38^\circ$.

Az EFG háromszög szögei 38º, 71º és 71º.